Karlsruher Institut für Technologie
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

18.11.2011

Prof. Dr. Frank Herrlich   Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Algebraische Geometrie 1 – Übungsblatt 5

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät und $U, \tilde{U}$ dichte, offene Teilmengen von V. Zeige, dass auch ihr Schnitt eine dichte, offene Teilmenge von V ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es seien $V = V(WX-YZ) \subset \mathbb{A}^4(k)$ und $x, y, z, w \in k[V]$ die Restklassen der entsprechenden Polynome in $k[X, Y, Z, W]$. Zeige:

a) Die affine Varietät V ist irreduzibel.

b) Auf $D(y) \cup D(w)$ wird durch

$$r(p) = r(x, y, z, w) = \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{für } p \in D(y) \\ \frac{z}{w} & \text{für } p \in D(w) \end{cases}$$

eine reguläre Funktion definiert.

c) Der maximale Definitionsbereich von r als rationale Funktion ist gleich $D(y) \cup D(w)$.

d) Die reguläre Funktion r kann auf $D(y) \cup D(w)$ nicht als f/g mit $f,\ g \in k[V]$ geschrieben werden.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Der algebraisch abgeschlossene Körper k habe nun Charakteristik 0. Es seien $a, b \in \mathbb{N}$, $V = V(X^a - Y^b) \subset \mathbb{A}^2(k)$ und $\Phi\colon\ \mathbb{A}^1(k) \to V$, $t \mapsto (t^b, t^a)$. Diskutiere folgende Punkte in Abhängigkeit von a und b:

- Wann ist Φ injektiv, wann surjektiv und wann ein Isomorphismus?
- Zerlege V in irreduzible Komponenten.
- Bestimme, wann Φ eine birationale Abbildung ist.

Hinweis: Betrachte den größten gemeinsamen Teiler d von a und b.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (5 Punkte)

a) Zeige: Die Gruppe $GL_2(k)$ operiert auf $\mathbb{P}^1(k)$ durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (x : y) := (ax + by : cx + dy).$$

Dabei operiert das Zentrum $Z(GL_2(k)) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) : a \in k^\times\}$ trivial, d.h. obige Operation definiert auch eine Operation von $PGL_2(k) = GL_2(k)/Z(GL_2(k))$ auf $\mathbb{P}^1(k)$.

Für paarweise verschiedene Punkte $P_1 = (x_1 : y_1), \ldots, P_4 = (x_4 : y_4) \in \mathbb{P}^1(k)$ ist das Doppelverhältnis gegeben durch

$$DV(P_1, \ldots, P_4) := \left(\frac{x_1y_3 - x_3y_1}{x_2y_3 - x_3y_2} : \frac{x_1y_4 - x_4y_1}{x_2y_4 - x_4y_2} \right).$$

b) Zeige: Das Doppelverhältnis ist invariant unter $PGL_2(k)$, d.h. für jedes $g \in PGL_2(k)$ ist $DV(P_1, \ldots, P_4) = DV(g(P_1), \ldots, g(P_4))$.

c) Zeige: $PGL_2(k)$ operiert dreifach transitiv auf $\mathbb{P}^1(k)$, d.h. zu je drei paarweise verschiedenen Punkten $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{P}^1(k)$ und $Q_1', Q_2', Q_3' \in \mathbb{P}^1(k)$ gibt es stets ein $g \in PGL_2(k)$ mit $(g(Q_1), g(Q_2), g(Q_3)) = (Q_1', Q_2', Q_3')$.

Abgabe bis Freitag, den 25.11.2011, zu Beginn der Übung oder vorher in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.