

Prof. Dr. Frank Herrlich Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Algebraische Geometrie 1 – Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Es sei k ein beliebiger(!) Körper und $n \geq 1$. Für einen Untervektorraum $U \subseteq k^{n+1}$ sei $\mathbb{P}(U) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ die Menge der eindimensionalen Untervektorräume von U . Falls $\dim_k U = 2$, so nennt man $\mathbb{P}(U)$ auch eine *Gerade*. Zeige:

- $\mathbb{P}(U)$ ist eine projektive Varietät.
- In $\mathbb{P}^2(k)$ haben zwei Geraden immer einen nichtleeren Durchschnitt.
- Zwei Punkte $a, b \in \mathbb{P}^n(k)$, $a \neq b$ liegen auf einer eindeutig bestimmten Geraden. Diese werde mit \overline{ab} bezeichnet.
- Auf jeder Geraden gibt es mindestens 3 Punkte.
- Wenn $a, b, c, d \in \mathbb{P}^n(k)$ paarweise verschiedene Punkte sind, so folgt aus $\overline{ab} \cap \overline{cd} \neq \emptyset$, dass auch $\overline{ac} \cap \overline{bd} \neq \emptyset$ gilt.

Ab hier bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

~~Aufgabe 2 (3 Punkte)~~

~~Bestimme die Automorphismen von $\mathbb{P}^1(k)$.~~

~~Tipp: Benutze Aufgabe 4 von Blatt 5.~~

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Es sei $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ ein graduierter Ring und $I \trianglelefteq S$ ein homogenes Ideal. Zeige:

Das Ideal I ist genau dann ein Primideal, wenn für beliebige homogene Elemente $f, g \in S$ aus $fg \in I$ folgt, dass $f \in I$ oder $g \in I$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei k ein Körper von Charakteristik $\neq 2$ und $a \in k^\times$. Die affine Varietät

$$L = V((X^2 + Y^2)^2 - a(X^2 - Y^2))$$

heißt *Lemniskate*.

Argumentiere, warum L irreduzibel ist. Zeige dann, dass $k(L) = k(t)$ mit $t = \frac{x^2+y^2}{x-y}$ gilt (wobei $x, y \in k[L]$ die Restklassen von X und $Y \in k[X, Y]$ sind). Folgere, dass L birational zu $\mathbb{A}^1(k)$ ist.

Hinweis: L entsteht aus einer Hyperbel unter der Inversion am Einheitskreis $\sigma : \mathbb{A}^2(k) \dashrightarrow \mathbb{A}^2(k)$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2} \cdot (x, y)$.

Abgabe bis Freitag, den 2.12.2011, zu Beginn der Übung oder vorher in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.