

## Algebraische Geometrie 1 – Übungsblatt 7

Auf diesem Blatt bezeichne  $k$  immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

### Aufgabe 1 (3 Punkte)

Es sei  $E = V(Y^2 - X^3 + X) \subset \mathbb{A}^2(k)$ . Wir betrachten die Einbettung  $\varphi_Z : \mathbb{A}^2(k) \rightarrow \mathbb{P}^2(k)$ ,  $(x, y) \mapsto (x : y : 1)$ .

Zeige: Der Abschluss von  $\varphi_Z(E)$  in  $\mathbb{P}^2(k)$  ist  $V(Y^2Z - X^3 + XZ^2)$ .

Welche Punkte liegen im Abschluss von  $\varphi_Z(E)$ , aber nicht in  $\varphi_Z(E)$ ?

### Aufgabe 2 (3 Punkte)

Zu einem Ideal  $I \triangleleft k[X_1, \dots, X_n]$  sei  $I^*$  das von den Homogenisierungen der Elemente von  $I$  (bezüglich  $X_0$ ) erzeugte homogene Ideal in  $k[X_0, \dots, X_n]$ . Weiter sei  $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$  eine affine Varietät und  $\varphi : \mathbb{A}^n(k) \rightarrow \mathbb{P}^n(k)$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n)$  die Einbettung. In der Vorlesung wurde  $\overline{\varphi(V(I))} = V(I^*)$  gezeigt.

Zeige, dass auch  $I(\overline{\varphi(V)}) = I(V)^*$  gilt.

### Aufgabe 3 (5 Punkte)

Die getwistete Kubik  $V = V(X^2 - Y, X^3 - Z) \subset \mathbb{A}^3(k)$  (von Blatt 1) kommt zurück!

Es sei  $\varphi : \mathbb{A}^3(k) \rightarrow \mathbb{P}^3(k)$  die Einbettung  $(x, y, z) \mapsto (1 : x : y : z)$  und  $k[W, X, Y, Z]$  der Koordinatenring von  $\mathbb{P}^3(k)$ . Zeige:

- $XZ - Y^2 \in I(\overline{\varphi(V)})$ , aber  $XZ - Y^2 \notin (X^2 - YW, X^3 - ZW^2)$ . Es reicht also nicht aus, nur die Erzeuger von  $I(V) = (X^2 - Y, X^3 - Z)$  zu homogenisieren.
- Es gilt  $\overline{\varphi(V)} = V(X^2 - YW, X^3 - ZW^2, XZ - Y^2)$ .
- Was sind die irreduziblen Komponenten von  $V(X^2 - YW) \cap V(X^3 - ZW^2)$ ?
- In c) haben wir auch gezeigt, dass der Schnitt von irreduziblen Varietäten nicht unbedingt irreduzibel sein muss.

Bitte wenden!

**Aufgabe 4** (5 Punkte)

Es seien  $r, s \in \mathbb{N}$  und  $N = (r + 1)(s + 1) - 1$ . Die Abbildung

$$\Psi : \begin{cases} \mathbb{P}^r(k) \times \mathbb{P}^s(k) & \rightarrow \\ ((x_0 : \dots : x_r), (y_0 : \dots : y_s)) & \mapsto (x_0 y_0 : \dots : x_0 y_s : \dots : x_r y_0 : \dots : x_r y_s) \end{cases}$$

heißt *Segre-Einbettung*. Zeige:

- $\Psi$  ist wohldefiniert und injektiv.
- $\text{Bild}(\Psi)$  ist eine irreduzible Untervarietät von  $\mathbb{P}^N(k)$ .

*Hinweis:* Es sei  $k[Z_{ij} \mid i = 0, \dots, r, j = 0, \dots, s]$  der Koordinatenring von  $\mathbb{P}^N(k)$ . Betrachte den  $k$ -Algebrenhomomorphismus

$$\Phi : k[Z_{ij}] \rightarrow k[X_0, \dots, X_r, Y_0, \dots, Y_s], \quad Z_{ij} \mapsto X_i Y_j$$

und zeige  $V(\text{Kern}(\Phi)) = \text{Bild}(\Psi)$ .

- Ist  $r = s = 1$ , so gilt  $\text{Bild}(\Psi) = V(Z_{00}Z_{11} - Z_{01}Z_{10})$ .

**Abgabe** bis Freitag, den 9.12.2011, zu Beginn der Übung oder vorher in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.