Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

2.12.2011

Prof. Dr. Frank Herrlich Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Algebraische Geometrie 1 – Übungsblatt 7

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Es sei $E = V(Y^2 - X^3 + X) \subset \mathbb{A}^2(k)$. Wir betrachten die Einbettung $\varphi_Z : \mathbb{A}^2(k) \to \mathbb{P}^2(k)$, $(x, y) \mapsto (x : y : 1)$.

Zeige: Der Abschluss von $\varphi_Z(E)$ in $\mathbb{P}^2(k)$ ist $V(Y^2Z - X^3 + XZ^2)$.

Welche Punkte liegen im Abschluss von $\varphi_Z(E)$, aber nicht in $\varphi_Z(E)$?

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Zu einem Ideal $I \trianglelefteq k[X_1, \ldots, X_n]$ sei I^* das von den Homogenisierungen der Elemente von I (bezüglich X_0) erzeugte homogene Ideal in $k[X_0, \ldots, X_n]$. Weiter sei $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine affine Varietät und $\varphi : \mathbb{A}^n(k) \to \mathbb{P}^n(k)$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \ldots : x_n)$ die Einbettung. In der Vorlesung wurde $\overline{\varphi(V(I))} = V(I^*)$ gezeigt.

Zeige, dass auch $I(\overline{\varphi(V)}) = I(V)^*$ gilt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Die getwistete Kubik $V = V(X^2 - Y, X^3 - Z) \subset \mathbb{A}^3(k)$ (von Blatt 1) kommt zurück!

Es sei $\varphi : \mathbb{A}^3(k) \to \mathbb{P}^3(k)$ die Einbettung $(x, y, z) \mapsto (1 : x : y : z)$ und $k[W, X, Y, Z]$ der Koordinatenring von $\mathbb{P}^3(k)$. Zeige:

a) $XZ - Y^2 \in I(\overline{\varphi(V)})$, aber $XZ - Y^2 \notin (X^2 - YW, X^3 - ZW^2)$. Es reicht also nicht aus, nur die Erzeuger von $I(V) = (X^2 - Y, X^3 - Z)$ zu homogenisieren.

b) Es gilt $\overline{\varphi(V)} = V(X^2 - YW, X^3 - ZW^2, XZ - Y^2)$.

c) Was sind die irreduziblen Komponenten von $V(X^2 - YW) \cap V(X^3 - ZW^2)$?

d) In c) haben wir auch gezeigt, dass der Schnitt von irreduziblen Varietäten nicht unbedingt irreduzibel sein muss.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Es seien $r, s \in \mathbb{N}$ und $N = (r+1)(s+1) - 1$. Die Abbildung

$$\Psi : \begin{cases} \mathbb{P}^r(k) \times \mathbb{P}^s(k) & \to & \mathbb{P}^N(k) \\ ((x_0 : \ldots : x_r), (y_0 : \ldots : y_s)) & \mapsto & (x_0 y_0 : \ldots : x_0 y_s : \ \ldots \ : x_r y_0 : \ldots : x_r y_s) \end{cases}$$

heißt *Segre-Einbettung*. Zeige:

a) Ψ ist wohldefiniert und injektiv.

b) $\operatorname{Bild}(\Psi)$ ist eine irreduzible Untervarietät von $\mathbb{P}^N(k)$.

Hinweis: Es sei $k[Z_{ij} \mid i = 0, \ldots, r,\ j = 0, \ldots, s]$ der Koordinatenring von $\mathbb{P}^N(k)$. Betrachte den k-Algebrenhomomorphismus

$$\Phi : k[Z_{ij}] \to k[X_0, \ldots, X_r, Y_0, \ldots, Y_s]\,, \quad Z_{ij} \mapsto X_i Y_j$$

und zeige $V(\operatorname{Kern}(\Phi)) = \operatorname{Bild}(\Psi)$.

c) Ist $r = s = 1$, so gilt $\operatorname{Bild}(\Psi) = V(Z_{00}Z_{11} - Z_{01}Z_{10})$.

Abgabe bis Freitag, den 9.12.2011, zu Beginn der Übung oder vorher in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.