Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

9.12.2011

Prof. Dr. Frank Herrlich   Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Algebraische Geometrie 1 – Lösung zum Übungsblatt 7

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Es seien $r, s \in \mathbb{N}$ und $N = (r+1)(s+1) - 1$. Die Abbildung

$$\Psi : \begin{cases} \mathbb{P}^r(k) \times \mathbb{P}^s(k) & \to & \mathbb{P}^N(k) \\ ((x_0 : \ldots : x_r), (y_0 : \ldots : y_s)) & \mapsto & (x_0y_0 : \ldots : x_0y_s : \ \ldots \ : x_ry_0 : \ldots : x_ry_s) \end{cases}$$

heißt *Segre-Einbettung*. Zeige:

a) Ψ ist wohldefiniert und injektiv.

b) Bild(Ψ) ist eine irreduzible Untervarietät von $\mathbb{P}^N(k)$.

Hinweis: Es sei $k[Z_{ij} \mid i = 0, \ldots, r,\ j = 0, \ldots, s]$ der Koordinatenring von $\mathbb{P}^N(k)$. Betrachte den k-Algebrenhomomorphismus

$$\Phi : k[Z_{ij}] \to k[X_0, \ldots, X_r, Y_0, \ldots, Y_s]\,, \quad Z_{ij} \mapsto X_iY_j$$

und zeige $V(\mathrm{Kern}(\Phi)) = \mathrm{Bild}(\Psi)$.

c) Ist $r = s = 1$, so gilt Bild(Ψ) $= V(Z_{00}Z_{11} - Z_{01}Z_{10})$.

Lösung:
a) Zunächst ist für $x = (x_0 : \ldots : x_r) \in \mathbb{P}^r(K)$, $y = (y_0 : \ldots : y_s) \in \mathbb{P}^s(K)$ der Ausdruck $\Psi(x, y)$ unabhängig vom Repräsentaten der Äquivalenzklasse, denn für $\lambda, \mu \in K^\times$ gilt

$$\begin{aligned} \Psi((\lambda x_0 : \ldots : \lambda x_r), (\mu y_0 : \ldots : \mu y_s)) &= (\lambda x_0 \mu y_0 : \ldots : \lambda x_i \mu y_j : \ldots : \lambda x_r \mu y_s) \\ &= (x_0y_0 : \ldots : x_iy_j : \ldots : x_ry_s) \\ &= \Psi((x_0 : \ldots : x_r), (y_0 : \ldots : y_s)). \end{aligned}$$

Außerdem gibt es einen Index i_0 mit $x_{i_0} \neq 0$ und einen Index j_0 mit $y_{j_0} \neq 0$, so dass also $x_{i_0}y_{j_0} \neq 0$ gilt, woraus folgt, dass $\Psi(x, y)$ nie in allen Koordinaten 0 ist.

Ψ ist injektiv: Denn seien $\tilde{x} = (\tilde{x}_0 : \ldots : \tilde{x}_r) \in \mathbb{P}^r(K)$, $\tilde{y} = (\tilde{y}_0 : \ldots : \tilde{y}_s) \in \mathbb{P}^s(K)$ zwei weitere Punkte und es gelte $\Psi(x, y) = \Psi(\tilde{x}, \tilde{y})$. Dann gibt es ein $\lambda \in K^\times$, so dass für alle $(i, j) \in \{0, \ldots, r\} \times \{0, \ldots, s\}$

$$x_iy_j = \lambda \tilde{x}_i \tilde{y}_j$$

gilt. Für beliebiges j und $i = i_0$ wie oben ist $y_j = \lambda \frac{\tilde{x}_{i_0}}{x_{i_0}} \tilde{y}_j$, und da $y_{j_0} \neq 0$ ist, folgt $\lambda \frac{\tilde{x}_{i_0}}{x_{i_0}} \neq 0$. Somit gilt $y = \tilde{y}$. Genauso zeigt man $x = \tilde{x}$; insgesamt folgt, dass Ψ injektiv ist.

b) In der Übung haben wir bereits gesehen, dass es reicht $V(\mathrm{Kern}(\Phi)) = \mathrm{Bild}(\Psi)$ zu zeigen.

Es gilt $\mathrm{Bild}(\Psi) \subseteq V(\mathrm{Kern}(\Phi))$, denn sei $F \in \mathrm{Kern}(\Phi)$ und $(x, y) \in \mathbb{P}^r(K) \times \mathbb{P}^s(K)$. Dann ist

$$F(\Psi(x, y)) = F((x_0 y_0 : \ldots : x_r y_s)) = \Phi(F)(x_0, \ldots, x_r, y_0 \ldots, y_s) = 0.$$

Für die andere Inklusion betrachten wir für $(i, j),\ (i', j') \in \{0, \ldots, r\} \times \{0, \ldots, s\}$ die Polynome

$$Z_{ij} Z_{i'j'} - Z_{ij'} Z_{i'j}.$$

Diese liegen im Kern von Φ. Sei J das von ihnen erzeugte Ideal, also

$$J = (Z_{ij} Z_{i'j'} - Z_{ij'} Z_{i'j} \mid (i, j),\ (i', j') \in \{0, \ldots, r\} \times \{0, \ldots, s\}).$$

Es ist $J \subseteq \mathrm{Kern}(\Phi)$, also $V(J) \supseteq V(\mathrm{Kern}(\Phi))$. Wenn wir zeigen, dass $V(J) \subseteq \mathrm{Bild}(\Psi)$ gilt, so sind wir fertig.

Es sei $z = (z_{00} : \ldots : z_{rs}) \in V(J)$. Zunächst gibt es ein Paar (i_0, j_0), für das $z_{i_0 j_0} \neq 0$ gilt. Es ist

$$z_{ij} z_{i_0 j_0} = z_{i j_0} z_{i_0 j},$$

was äquivalent ist zu

$$z_{ij} = \frac{z_{i j_0} z_{i_0 j}}{z_{i_0 j_0}}.$$

Wir setzen $x_i = z_{i j_0}$ und $y_j = z_{i_0 j}$. Dies definiert zwei Punkte $x = (\ldots : x_i : \ldots) \in \mathbb{P}^r(K)$ und $y = (\ldots : y_j : \ldots) \in \mathbb{P}^s(K)$, und es gilt

$$\Psi(x, y) = (\ldots : z_{i j_0} z_{i_0 j} : \ldots) = (\ldots : \frac{z_{i j_0} z_{i_0 j}}{z_{i_0 j_0}} : \ldots) = (\ldots : z_{ij} : \ldots).$$

Somit ist $z \in \mathrm{Bild}(\Psi)$.

c) Aus b) erhalten wir unter anderem $\mathrm{Bild}(\Psi) = V(J)$, und es gilt für $r = s = 1$

$$J = (Z_{00} Z_{11} - Z_{01} Z_{10}),$$

denn alle anderen Erzeuger sind 0.