Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

16.12.2011

Prof. Dr. Frank Herrlich Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Algebraische Geometrie 1 – Übungsblatt 9

Die Übung vor Weihnachten wird vom 23.12. auf den 22.12. vorverlegt. Sie findet am Donnerstag, den 22.12., im 5. Block (15:45-17:15) im Raum 1C-01 statt.

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen Körper, der nicht notwendigerweise algebraisch abgeschlossen ist.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $n \geq 1, d \geq 0$, V ein n-dimensionaler k-Vektorraum und $\wedge\colon V^d \to \bigwedge^d V, (v_1, \dots, v_d) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_d$ die aus der Vorlesung bekannte multilineare, alternierende Abbildung.

a) Zeige, dass das äußere Produkt $\bigwedge^d V$ folgende UAE erfüllt: Für jeden k-Vektorraum W und jede multilineare, alternierende Abbildung $\Phi\colon V^d \to W$ existiert genau eine lineare Abbildung $\Psi\colon \bigwedge^d V \to W$ mit $\Psi \circ \wedge = \Phi$.

b) Sei $\bigwedge^0 V := k$. Zeige, dass $\bigoplus\limits_{d \geq 0} \bigwedge^d V$ durch

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_d) \cdot (w_1 \wedge \dots \wedge w_l) = (v_1 \wedge \dots \wedge v_d \wedge w_1 \wedge \dots w_l)$$

für $v_i, w_j \in V$ zu einer k-Algebra wird.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

a) Zeige, dass die Graßmann-Varietät $G(2,3)$ isomorph zu $\mathbb{P}^2(k)$ ist.

b) Die Graßmann-Varietät $G(2,4)$ ist die erste, die kein projektiver Raum ist.

Die Charakteristik von k sei nicht 2. Zeige, dass $G(2,4)$, aufgefasst als Untervarietät des $\mathbb{P}(\bigwedge^2 k^4)$ und bezüglich einer geeigneten Wahl der Koordinaten, gleich der Verschwindungsmenge von

$$X_{12}X_{34} - X_{13}X_{24} + X_{14}X_{23}$$

ist.

Hinweis: Zeige, dass $0 \neq w \in \bigwedge^2 k^4$ genau dann total zerlegbar ist, wenn $w \wedge w = 0$ gilt.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (7 Punkte)
Es seien $n \geq 1$, $d \in \{0, \dots, n\}$, $W \leq k^n$ ein Untervektorraum der Dimension $(n-d)$ und

$$U := \{V \in G(d,n) \mid V \oplus W = k^n\}.$$

Zeige:

a) U ist offen in $G(d,n)$.

b) U ist isomorph zu $\mathbb{A}^{d(n-d)}(k)$.

   Hinweis: Interpretiere U als Menge der linearen Projektionen $k^n \to W$.
   Auch die UAE des äußeren Produkts könnte hilfreich sein.

c) **Ist k ein unendlicher Körper**, so ist $G(d,n)$ irreduzibel.

Abgabe bis **Donnerstag**, den 22.12.2011, zu Beginn der Übung oder vorher in den Kasten im 1. Stock, C-Teil des Allianzgebäudes 05.20.