Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Algebra und Geometrie

22.12.2011

Prof. Dr. Frank Herrlich   Dipl.-Math. Dipl.-Inform. Myriam Finster

Algebraische Geometrie 1 – Lösung zum Übungsblatt 9

Auf diesem Blatt bezeichne k immer einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

Aufgabe 3 (7 Punkte)
Es seien $n \geq 1$, $d \in \{0, \dots, n\}$, $W \leq k^n$ ein Untervektorraum der Dimension $(n-d)$ und

$$U := \{V \in G(d,n) \mid V \oplus W = k^n\}.$$

Zeige:

a) U ist offen in $G(d,n)$.

b) U ist isomorph zu $\mathbb{A}^{d(n-d)}(k)$.

Hinweis: Interpretiere U als Menge der linearen Projektionen $k^n \to W$.
Auch die UAE des äußeren Produkts könnte hilfreich sein.

c) **Ist k ein unendlicher Körper**, so ist $G(d,n)$ irreduzibel.

Lösung:
Aufgabenteil a) haben wir bereits in der Übung gelöst, die Aufgabenteile b) und c) haben wir nur skizziert, darum kommt hier noch einmal die ausführlichere Lösung.

b) Sei $P := \{p : k^n \to W \mid p \text{ ist eine Projektion}\} \subseteq \mathrm{Hom}(k^n, W)$ und $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von k^n, so dass $W = \langle e_{d+1}, \dots, e_n \rangle$. Für jede Projektion $p \in P$ gilt dann für $j \in \{1, \dots, d\}$: $p(e_j) = \sum_{i=d+1}^{n} a_{ij} e_i$ mit $a_{ij} \in k$ und für $j \in \{d+1, \dots, n\}$: $p(e_j) = e_j$.

Bezüglich E hat p also folgende Gestalt: $\begin{pmatrix} 0 & & \dots & & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & & \dots & & \dots & 0 \\ a_{d+1,1} & \dots & a_{d+1,d} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,d} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Zu jeder Wahl der $a_{ij} \in k$, $i \in \{d+1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, d\}$ gehört genau ein $p \in P$, so dass wir eine Bijektion zwischen P und $\mathbb{A}^{d(n-d)}(k)$ bekommen.

Wir definieren nun die (naheliegende) Bijektion zwischen U und P,

$$\Phi \colon \begin{cases} U & \to & P \\ V & \mapsto & (V \oplus W \mapsto W) \end{cases}$$

mit Umkehrabbildung $\Phi^{-1}\colon P \to U, p \mapsto \mathrm{Kern}(p)$. Es bleibt zu zeigen, dass Φ und Φ^{-1} regulär sind.

Sei zunächst $V = \langle v_1, \dots, v_d \rangle \in U$. Dann ist $\{v_1, \dots, v_d, e_{d+1}, \dots, e_n\}$ eine Basis von k^n, also ist $A := (v_1|\dots|v_d|e_{d+1}|\dots|e_n)$ invertierbar. Bezüglich E hat $\Phi(V)$ die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \dots & & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A^{-1}$$

Zu zeigen bleibt damit, dass die Einträge a'_{ij} von A^{-1} reguläre Funktionen auf U sind. Es gilt $a'_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A)^{-1} \cdot \det(A')$, wobei A' aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Wie im Aufgabenteil a) sind $\det(A)$ und $\det(A')$ durch lineare Polynome gegeben (dort haben wir die UAE des äußeren Produkts verwendet). Außerdem ist $\det(A) \neq 0$ auf ganz U. Damit ist gezeigt, dass Φ regulär ist.

Für Φ^{-1} betrachten wir $p \in P$.

$$\mathrm{Kern}(p) = \mathrm{Kern}(\begin{pmatrix} 0 & & & \dots & & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & \dots & & \dots & 0 \\ a_{d+1,1} & \dots & a_{d+1,d} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,d} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}) = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{d+1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ a_{d+1,d} \\ \vdots \\ a_{n,d} \end{pmatrix} \rangle$$
$$=: \langle v_1, \dots, v_d \rangle.$$

Damit gilt $\Phi^{-1}(p) = v_1 \wedge \dots \wedge v_d$, was linear in den a_{ij} ist.

c) Nach b) ist U isomorph zu $\mathbb{A}^{d(n-d)}(k)$ und da k **unendlich** ist, ist $\mathbb{A}^{d(n-d)}(k)$ irreduzibel. Wir zeigen, dass U dicht in $G(n, d)$ liegt. Damit ist dann auch $\overline{U} = G(d, n)$ irreduzibel.

Sei $V \in G(d, n)$. Zu zeigen ist, dass V im Abschluss von U liegt.

Es gibt ein W' mit $k^n = V \oplus W'$, also ist $V \in U' := \{V' \in G(d, n) \mid V' \oplus W' = k^n\}$. Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass $U \cap U' = \{V : V \oplus W = V \oplus W' = K^n\} \neq \emptyset$ gilt. Die Varietät U' ist (nach b)) irreduzibel also ist $\overline{U \cap U'} = U'$ und damit $V \in \overline{U \cap U'} \subseteq \overline{U}$.