Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dipl.-Math. Jingwei Zhao

01.07.2013

# Algebraische Zahlentheorie – Übungsblatt 10

## Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $G$ eine endliche Gruppe, $H$ eine Untergruppe und $B$ ein $H$-Modul. Wir setzen $M_G^H(B) := \{f : G \to B \,|\, f(\tau\sigma) = \tau f(\sigma)\ \forall \tau \in H\}$. Zeigen Sie: Es ist in kanonischer Weise

$$H^i(H, B) \cong H^i(G, M_G^H(B)) \quad \text{für } i = 0, 1.$$

Für die folgenden Aufgaben seien $n$ eine natürliche Zahl und K ein Körper mit $\mathrm{char} K \nmid n$ und $\mu_n \in K^\times$.

## Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\Delta \leq K^\times$ mit $(K^\times)^n \leq \Delta$. Zeigen Sie: Die Kummer-Erweiterung $K(\sqrt[n]{\Delta})$ über $K$ ist galoissch mit abelscher Galoisgruppe $G$ vom Exponenten $n$.

## Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\{F_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Kummer-Erweiterungen des Körpers $K$ in einem festen algebraischen Abschluss und sei $F$ das Kompositum aller $F_i$. Zeigen Sie: $F/K$ ist ebenfalls eine Kummer-Erweiterung.

## Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass $\widetilde{K} := K(\sqrt[n]{K^\times})$ die maximale Kummer-Erweiterung von $K$ ist mit

$$K^\times/(K^\times)^n \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K), \mu_n).$$

**Abgabe**: Bis Montag, den 08.07.2013, vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.