Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dipl.-Math. Jingwei Zhao

08.07.2013

Algebraische Zahlentheorie – Übungsblatt 11

Auf diesem Übungsblatt seien G eine pro-endliche Gruppe und A ein stetiger G-Modul, der das Klassenkörperaxiom erfüllt.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien M ein G-Modul und H eine normale Untergruppe von G. Zeigen Sie:

(a) Die Projektion $\pi : G \to G/H$ und die Inklusion $L : M^H \hookrightarrow M$ induzieren einen Gruppenhomomorphismus Inf: $H^1(G/H, M^H) \to H^1(G, M)$. Wir nennen ihn *Inflationshomomorphismus.*

(b) Ist $\xi : G \to M$ eine 1-Kokette, dann induziert die Einschränkung $\xi|_H$ einen Homomorphismus Res: $H^1(G, M) \to H^1(H, M)$. Dieser heißt *Restriktionshomomorphismus*

(c) Die *Inflations-Restriktions-Sequenz*

$$0 \longrightarrow H^1(G/H, M^H) \xrightarrow{\text{Inf}} H^1(G, M) \xrightarrow{\text{Res}} H^1(H, M).$$

ist exakt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei n eine natürliche Zahl und sei die Gruppe $\mu_n = \{\xi \in A \,|\, \xi^n = 1\}$ zyklisch von der Ordnung n und $A \subset A^n$. Sei G_K eine abgeschlossene Untergruppe von G mit Fixkörper K und es gelte $\mu_n \subset A_K$. Sei L/K die maximale abelsche Erweiterung vom Exponenten n.
Zeigen Sie: Ist L/K endlich, so ist $N_{L/K} A_L = A_K^n$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

In der abstrakten Galoistheorie versehen wir die Gruppe A_K für jeden Körper K mit einer Topologie, indem wir die Nebenklassen $aN_{L/K}A_L$ als Umgebungsbasis von $a \in A_K$ auszeichnen, wobei L/K alle endlichen galoisschen Erweiterungen von K durchläuft. Wir nennen diese Topologie die *Normtopologie* von A_K.
Zeigen Sie: A_K ist genau dann hausdorffsch, wenn die Gruppe $A_K^0 := \bigcap_L N_{L/K} A_L$ der *universellen Normen* trivial ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien p und l zwei verschiedene ungerade Primzahlen mit $l \equiv 1 \bmod p$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}_l(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_l$ eine unendliche Galoiserweiterung mit einer zu $\mathbb{Z}_p$ isomorphen Galoisgruppe ist.

Abgabe: Bis Montag, den 15.07.2013, vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.