Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dipl.-Math. Jingwei Zhao

29.04.2013

Algebraische Zahlentheorie – Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei A ein ganzabgeschlossener Integritätsbereich mit Quotientenkörper K, L/K eine endliche Erweiterung und B der ganze Abschluss von A in L.
Zeigen Sie, dass für alle $b \in B$ gilt:

$$b \in B^\times \iff N_{L/K}(b) \in A^\times.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass ein Dedekindring mit endlich vielen Primidealen ein Hauptidealring ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\Gamma = \mathbb{Z}v_1 + \ldots + \mathbb{Z}v_m$ ein Gitter in V mit der Grundmasche $\Phi = \{x_1v_1 + \ldots + x_mv_m \,|\, x_i \in \mathbb{R},\, 0 \leq x_i < 1\}$.
Zeigen Sie:

$$\Gamma \text{ ist vollständig } \iff V = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \Phi + \gamma.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei K ein algebraischer Zahlkörper mit $(K : \mathbb{Q}) = n$. Wir haben eine kanonische Einbettung von K in $K_\mathbb{C} := \prod_\tau \mathbb{C}$, wobei τ die n Einbettungen von K in $\mathbb{C}$ durchläuft:

$$j : K \to K_\mathbb{C}, \quad a \mapsto ja = (\tau a).$$

Mit F bezeichnen wir sowohl die komplexe Konjugation auf $\mathbb{C}$ als auch die Involution auf $K_\mathbb{C}$, die wir aus der Vorlesung kennen. Desweiteren seien $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Skalarprodukt auf $K_\mathbb{C}$, gegeben durch $\langle x, y\rangle = \sum_\tau x_\tau \overline{y}_\tau$ und Tr die Spurabbildung.
Zeigen Sie:

(i) $\langle Fx, Fy\rangle = F\langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in K_\mathbb{C}$.

(ii) $\langle Fx, Fy\rangle = \langle x, y\rangle$ und $\mathrm{Tr}(Fx) = \mathrm{Tr}(x)$.

Abgabe: Bis Montag, den 06.05.2013, vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.