

13.05.2013

Algebraische Zahlentheorie – Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei p eine ungerade Primzahl und ζ eine primitive p -te Einheitswurzel. Zeigen Sie:
Ist $\varepsilon \in \mathbb{Z}[\zeta]^\times$, so gibt es ein $\varepsilon_1 \in \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$ und ein $r \in \mathbb{Z}$, sodass $\varepsilon = \zeta^r \varepsilon_1$ gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei ζ eine primitive m -te Einheitswurzel, $m \geq 3$. Zeigen Sie, dass $\frac{1-\zeta^k}{1-\zeta} \in \mathbb{Z}[\zeta]^\times$ für alle zu m teilerfremden $k \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung: Solche Einheiten heißen **zyklotomische Einheiten**.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ein imaginär quadratischer Zahlkörper. Bestimmen Sie die Einheitsgruppe von \mathcal{O}_K .

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien p eine beliebige Primzahl und ζ ein primitive p -te Einheitswurzel. Wir betrachten den Kreisteilungskörper $K = \mathbb{Q}(\zeta)$.

- Zeigen Sie, dass p zu $(1 - \zeta)^{p-1}$ assoziiert ist.
- Sei \mathfrak{p} ein über p liegendes Primideal von K . Bestimmen Sie die Zerlegungsgruppe von \mathfrak{p} über \mathbb{Q} .

Abgabe: Bis Montag, den 20.05.2013, vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.