Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dipl.-Math. Jingwei Zhao

27.05.2013

Algebraische Zahlentheorie – Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei F/K eine endliche Galoiserweiterung algebraischer Zahlkörper und sei $\mathfrak{P}$ ein über K unverzweigtes Primideal (d.h. $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap K$ ist unverzweigt in F). Zeigen Sie:

(a) Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\kappa(\mathfrak{P})/\kappa(\mathfrak{p}))$ der Restklassenkörpererweiterung lässt sich in $\mathrm{Gal}(F/K)$ einbetten.

(b) Es gibt genau einen Automorphismus $\varphi_{\mathfrak{P}} \in \mathrm{Gal}(F/K)$, den sogenannten **Frobenius-Automorphismus**, mit

$$\varphi_{\mathfrak{P}}(a) \equiv a^q \mod \mathfrak{P} \text{ für alle } a \in \mathcal{O}_F,$$

wobei $q = \#\kappa(\mathfrak{p})$. Die Zerlegungsgruppe $G_{\mathfrak{P}}$ ist zyklisch und $\varphi_{\mathfrak{P}}$ ist ein Erzeugendes von $G_{\mathfrak{P}}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ein quadratischer Zahlkörper mit einer quadratfreien ganzen Zahl d. Wir setzen $D = 4d$, wenn $d \equiv 2, 3 \mod 4$, und $D = d$, wenn $d \equiv 1 \mod 4$.
Weiter sei p eine beliebige ungerade Primzahl. Für jede ganze Zahl a definieren wir das *Legendresymbol* $\left(\frac{a}{p}\right)$ wie folgt: $\left(\frac{a}{p}\right) = 0$, wenn $p \mid a$; ist p kein Teiler von a, so setzt man $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$, wenn die Kongruenz $x^2 \equiv a \mod p$ eine Lösung in $\mathbb{Z}$ hat, und $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$, wenn sie keine Lösung in $\mathbb{Z}$ hat.

(a) Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$p \text{ ist (voll) zerlegt in } \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \Longleftrightarrow \left(\frac{D}{p}\right) = 1.$$

(b) Seien p und l ungerade Primzahlen und $l^* = (-1)^{\frac{l-1}{2}} l$. Folgern Sie aus (a), dass dann $\left(\frac{l^*}{p}\right) = \left(\frac{p}{l}\right)$ gilt.

Abgabe: Bis Montag, den 3.06.2013, vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.