

27.05.2013

## Algebraische Zahlentheorie – Übungsblatt 5

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei  $F/K$  eine endliche Galoiserweiterung algebraischer Zahlkörper und sei  $\mathfrak{P}$  ein über  $K$  unverzweigtes Primideal (d.h.  $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap K$  ist unverzweigt in  $F$ ). Zeigen Sie:

- Die Galoisgruppe  $\text{Gal}(\kappa(\mathfrak{P})/\kappa(\mathfrak{p}))$  der Restklassenkörpererweiterung lässt sich in  $\text{Gal}(F/K)$  einbetten.
- Es gibt genau einen Automorphismus  $\varphi_{\mathfrak{P}} \in \text{Gal}(F/K)$ , den sogenannten **Frobenius-Automorphismus**, mit

$$\varphi_{\mathfrak{P}}(a) \equiv a^q \pmod{\mathfrak{P}} \text{ für alle } a \in \mathcal{O}_F,$$

wobei  $q = \#\kappa(\mathfrak{p})$ . Die Zerlegungsgruppe  $G_{\mathfrak{P}}$  ist zyklisch und  $\varphi_{\mathfrak{P}}$  ist ein Erzeugendes von  $G_{\mathfrak{P}}$ .

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei  $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$  ein quadratischer Zahlkörper mit einer quadratfreien ganzen Zahl  $d$ . Wir setzen  $D = 4d$ , wenn  $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ , und  $D = d$ , wenn  $d \equiv 1 \pmod{4}$ .

Weiter sei  $p$  eine beliebige ungerade Primzahl. Für jede ganze Zahl  $a$  definieren wir das *Legendresymbol*  $\left(\frac{a}{p}\right)$  wie folgt:  $\left(\frac{a}{p}\right) = 0$ , wenn  $p \mid a$ ; ist  $p$  kein Teiler von  $a$ , so setzt man  $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ , wenn die Kongruenz  $x^2 \equiv a \pmod{p}$  eine Lösung in  $\mathbb{Z}$  hat, und  $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$ , wenn sie keine Lösung in  $\mathbb{Z}$  hat.

- Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$p \text{ ist (voll) zerlegt in } \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \iff \left(\frac{D}{p}\right) = 1.$$

- Seien  $p$  und  $l$  ungerade Primzahlen und  $l^* = (-1)^{\frac{l-1}{2}}l$ . Folgern Sie aus (a), dass dann  $\left(\frac{l^*}{p}\right) = \left(\frac{p}{l}\right)$  gilt.

**Abgabe:** Bis Montag, den 3.06.2013, vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.