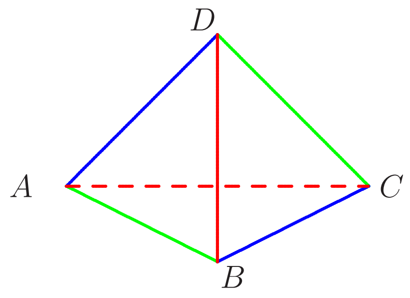
A_4 ist nicht einfach

Wir betrachten das folgende bunte Tetraeder T mit den Ecken A, B, C, D :



Auf diesem Tetraeder operiert die symmetrische Gruppe $G = \mathrm{Sym}(\{A, B, C, D\})$, die zu S_4 isomorph ist, wobei die Wirkung einer Permutation der Ecken affin auf Kanten beziehungsweise Fläche fortgesetzt wird. G operiert transitiv auf den Ecken.

Die Operation von G liefert auch eine Operation von G auf der Menge der Kanten des Tetraeders. Da zwei disjunkte Kanten von T wieder auf disjunkte Kanten abgebildet werden, operiert G auch auf der Menge aller zweielementigen Mengen von disjunkten Kanten von T, also auf

$$\{\{\{W, X\}, \{Y, Z\}\} \mid \{W, X, Y, Z\} = \{A, B, C, D\}\}.$$

Diese Menge steht in Bijektion zu den im Bild verwendeten Farben. Die Farbe grün entspricht der Menge $\{\{A, B\}, \{C, D\}\}$ usw.

Das liefert uns einen Homomorphismus $\Phi : G \to S_3$, wobei S_3 für die symmetrische Gruppe der drei Farben steht. Ein Element im Kern ist bereits durch das Bild von A festgelegt, denn jede andere Ecke X ist durch die Farbe der Kante $\{A, X\}$ beschrieben. Wenn ich also $\sigma(A)$ kenne und σ farbentreu sein soll, dann kenne ich auch $\sigma(X)$, denn in jeder Ecke treffen sich alle drei Farben. Man sieht daran, dass der Kern von Φ höchstens 4 Elemente enthält.

Die Elemente $Id, (A\ B)(C\ D),\ (A\ C)(B\ D), (A\ D)(B\ C)$ liegen alle im Kern und bilden daher einen Normalteiler V_4 in S_3. Dieser heißt die Kleinsche Vierergruppe.

Es ist G/V_4 isomorph zu S_3.

Da V_4 sogar in A_4 liegt, ist insbesondere A_4 nicht einfach.