Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie

PD Dr. Stefan Kühnlein Dipl.-Math. Jochen Schröder

Einführung in Algebra und Zahlentheorie – Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Sei R ein Integritätsbereich. Zeige die Äquivalenz der nachfolgenden Aussagen:
   (i) R ist ein Körper.
   (ii) R besitzt genau zwei Assoziiertenklassen.
   (iii) R besitzt nur endlich viele Assoziiertenklassen.

b) Finde einen Ring R mit genau drei Assoziiertenklassen.

Aufgabe 2 (8 Punkte)
Sei $\mathcal{A}$ der Ring der arithmetischen Funktionen. Die eulersche φ-Funktion, die konstante Funktion $\eta \equiv 1$ und die kanonische Einbettung $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ sind Elemente aus $\mathcal{A}$. Zeige:

a) Das Produkt zweier multiplikativer arithmetischer Funktionen ist multiplikativ.

b) Die Inverse einer multiplikativ arithmetischen Funktion ist multiplikativ.
   (*Hinweis:* Überlege dir zunächst, wieso es reicht, zu zeigen, dass $\beta(p^e \cdot m) = \beta(p^e) \cdot \beta(m)$ für alle $p \in \mathbb{P}$, $e \in \mathbb{N}_0$ und für alle zu p teilerfremden $m \in \mathbb{N}$ gilt. Diese Aussage kann etwa mit doppelter Induktion nach e und m bewiesen werden.)

c) Die Menge aller multiplikativen arithmetischen Funktionen ist eine Untergruppe von $\mathcal{A}^\times$.

d) Es ist $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}} = \eta * \varphi$.

e) Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist die *Teilerpotenzsummenfunktion* $\sigma_k \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, gegeben durch $\sigma_k(n) = \sum\limits_{d|n} d^k$, multiplikativ.

Aufgabe 3 (4 Punkte) (Zum Abschluss gibt es etwas zum Knobeln!)
Finde einen kommutativen Ring R und Elemente $a, b \in R$, die sich gegenseitig teilen, aber nicht assoziiert sind.

Abgabe der Übungsblätter:
Bitte wirf deine Lösung zu diesem Übungsblatt bis Donnerstag, 27. Juni 2013, 11:30 Uhr in den entsprechenden Abgabekasten im 1C-Teil des Allianzgebäudes oder gib sie deinem Übungsleiter direkt vor der großen Übung.