Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein   Dipl.-Math. Jochen Schröder

Einführung in Algebra und Zahlentheorie – Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ gibt es eine Primzahl p mit $p \equiv a$ (modulo b).

(ii) Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ gibt es unendlich viele Primzahlen p mit $p \equiv a$ (modulo b).

(Die zweite Aussage ist bekannt als der Dirichlet'sche Primzahlsatz. Diesen Satz wollen wir hier weder verwenden noch beweisen. Wir wollen einsehen, dass ein Beweis der ersten Aussage bereits den ganzen Satz zeigt.)

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Wir betrachten das Magma $M = (\mathbb{Z}, -)$.

a) Zeige, dass M keine Halbgruppe ist. Zeige weiterhin, dass M kein neutrales Element besitzt. Gib gegebenenfalls ein links- bzw. rechtsneutrales Element an und folgere daraus, dass M nicht kommutativ ist.

b) Finde ein Erzeugendensystem von M, so dass es kein Erzeugendensystem mit weniger Elementen gibt. Wieviele solcher Systeme gibt es? Finde weiterhin ein Erzeugendensystem, das echt mehr Elemente besitzt, aber kein kleineres Erzeugendensystem umfasst.

c) Zeige, dass $(\mathrm{End}(M), \circ)$ und $(\mathbb{Z}, \cdot)$ als Monoide isomorph sind.[1]

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Zeige, dass jedes Untermonoid M von $(\mathbb{N}_0, +)$ endlich erzeugt ist.

b) Zeige, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Untermonoid M von $(\mathbb{N}_0, +)$ existiert, für das es kein Erzeugendensystem mit weniger als k Elementen gibt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei H die Menge aller Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ b & 0 & b \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$ und $a \neq \pm c$. Zeige die folgenden Aussagen:

a) Die Matrizen-Multiplikation $\cdot$ ist eine Verknüpfung auf H und $(H, \cdot)$ wird dadurch zu einer Halbgruppe.[2]

b) Bestimme alle rechtsneutralen Elemente $E \in H$, also die Matrizen E mit $AE = A$ für alle $A \in H$.

c) Für jedes rechtsneutrale Element $E \in H$ und jedes $A \in H$ gibt es genau ein $\hat{A} \in H$ mit $\hat{A}A = E$.

d) Für jedes $A \in H$ gibt es genau ein rechtsneutrales Element E, so dass es ein $\tilde{A} \in H$ gibt mit $A\tilde{A} = E$. In diesem Fall gibt es dann unendlich viele Matrizen $\tilde{A}$, die die Bedingung erfüllen.

Hinweis: Du musst nicht alles explizit ausrechnen. Wenn ein quadratisches rationales Gleichungssystem gelöst werden soll, darf benutzt werden, dass es eindeutig lösbar ist, wenn die Determinante der Koeffizienten-Matrix ungleich 0 *ist.*

Abgabe der Übungsblätter:
Bitte wirf deine Lösung zu diesem Übungsblatt bis Donnerstag, 2. Mai, 11:20 Uhr in den entsprechenden Abgabekasten im 1C-Teil des Allianzgebäudes oder gib diese direkt vor der großen Übung deinem Übungsleiter.

[1] Dass $(\mathrm{End}(M), \circ)$ ein Monoid ist, muss nicht bewiesen werden.
[2] Die Assoziativität der Matrizen-Multiplikation kennen wir aus der linearen Algebra.