Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein   Dipl.-Math. Jochen Schröder

Einführung in Algebra und Zahlentheorie – Übungsblatt 5 – Musterlösung

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei G eine Gruppe mit Normalteilern $H, N \trianglelefteq G$. Desweiteren sei $N \subseteq H$. Zeige, dass gilt:

a) N ist ein Normalteiler in H.

b) H/N ist ein Normalteiler in G/N.

c) $(G/N)/(H/N) \cong G/H$.

Lösung:

a) Auf $N \subseteq H \subseteq G$ ist stets die gleiche Verknüpfung gegeben. Dass $N \subseteq H$ eine Untergruppe ist, ist dann klar, denn als Untergruppe von G ist N selbst eine Gruppe.

Weiterhin müssen wir zeigen, dass N zusätzlich die Normalteilereigenschaft erfüllt, das heißt, $hnh^{-1} \overset{(!)}{\in} N$ für alle $n \in N$, $h \in H$. Das ist richtig, denn $h \in G$, $n \in N$ und N ist ein Normalteiler von G.

b) Sicher ist $H/N = \{hN : h \in H\}$ eine Teilmenge von $\{gN : g \in G\}$. Dass H/N sogar eine Untergruppe ist, zeigen wir mit dem Untergruppenkriterium:

- Wegen $N = eN \in H/N$ ist $H/N \neq \emptyset$.
- Für $h_1N, h_2N \in H/N$ (mit $h_1, h_2 \in H$) ist $(h_1N)(h_2N)^{-1} = (h_1N)(h_2^{-1}N) = h_1h_2^{-1}N \in H/N$.

Weiterhin müssen wir zeigen, dass H/N die Normalteilereigenschaft erfüllt, das heißt, $gNhN(gN)^{-1} \overset{(!)}{\in} H/N$ für alle $hN \in H/N$, $gN \in G/N$ (mit $h \in H$, $g \in G$).
Es ist $gNhN(gN)^{-1} = (ghg^{-1})N \in H/N$, denn $ghg^1 \in H$, da $H \subseteq G$ ein Normalteiler ist.

c) Seien $G \overset{\pi_1}{\mapsto} G/N$, $G/N \overset{\pi_2}{\mapsto} (G/N)/(H/N)$ die kanonischen Projektionen auf die entsprechende Faktorgruppe. π_1, π_2 sind surjektive lineare Abbildungen, also ist auch die Verkettung $\pi = \pi_2 \circ \pi_1 : G \mapsto (G/N)/(H/N)$ surjektiv und linear.
Wir berechnen $\pi(g) = \pi_2(gN) = gN(H/N)$ für alle $g \in G$.

Es ist $g \in \mathrm{Kern}(\pi)) \Leftrightarrow gN(H/N) = e_{G/N}(H/N) = H/N \Leftrightarrow gN \in H/N \Leftrightarrow g \in H$.

Die gewünschte Aussage folgt nun aus dem Homomorphiesatz, denn es ist $G/\mathrm{Kern}(\pi) \cong \mathrm{Bild}(\pi)$ mit $\mathrm{Kern}(\pi) = H$ und $\mathrm{Bild}(\pi) = (G/N)/(H/N)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei G eine Gruppe. Der *Kommutator* $[G, G]$ sei diejenige Untergruppe von G, die von allen *Kommutatoren* $xyx^{-1}y^{-1}$ mit $x, y \in G$ erzeugt wird. Zeige die folgenden Aussagen:

a) $[G, G]$ ist ein Normalteiler in G.

b) Für einen Normalteiler $N \trianglelefteq G$ gilt: G/N ist abelsch $\Leftrightarrow [G, G] \subseteq N$.
Insbesondere ist $G^{ab} := G/[G, G]$ abelsch.

c) Bezeichne $\pi \colon G \to G^{ab}$ die kanonische Projektion. G^{ab} erfüllt die folgende Eigenschaft[1]:
Für jede abelsche Gruppe H und jeden Gruppenhomomorphismus $\varphi \colon G \to H$ gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\overline{\varphi} : G^{ab} \to H$ mit $\varphi = \overline{\varphi} \circ \pi$.

[1] Man nennt dies die *universelle Abbildungseigenschaft* von G^{ab}.

Lösung:

a) $[G,G]$ ist nach Definition eine Untergruppe von G. Wir müssen die Normalteilereigenschaft nachprüfen: Seien $g \in G, n \in [G,G]$ beliebig. Dann ist $gng^{-1}n^{-1} \in [G,G]$, also ist auch $gng^{-1} = (gng^{-1}n^{-1}) \cdot n$ (als Produkt von Elementen in $[G,G]$) in $[G,G]$ enthalten.

(**Alternativer Beweis/Zusatz/Achtung:** Ohne weitere Begründung ist es **nicht ausreichend**, für n einen Kommutator einzusetzen:
Es ist $g \cdot xyx^{-1}y^{-1} \cdot g^{-1} = (gxg^{-1})(gyg^{-1})(gxg^{-1})^{-1}(gyg^{-1})^{-1} \in [G,G]$, aber nicht jedes Element aus N ist von der Form $xyx^{-1}y^{-1}$, sondern ein endliches Produkt solcher Elemente (und deren Inverse, die aber wieder Kommutatoren sind).
Dann müssen wir noch zusätzlich diese Aussage zeigen, die ich hier für eine beliebige Untergruppe N aufschreibe. Dabei sei stets $g \in G$ beliebig.
Ist N eine Untergruppe von G und M ein Erzeugendensystem von N und die Normalteilereigenschaft $gmg^{-1} \in N$ gelte für alle Erzeuger $m \in M$, dann gilt sie für alle $n \in N$:
Zunächst gilt sie wegen $gmg^{-1} \in N \Rightarrow gm^{-1}g^{-1} = (gmg^{-1})^{-1} \in N$ auch für die Inversen aus M und dann für jedes endliche Produkt $n = \prod_i m_i$ (mit $m_i \in M$ oder $m_i \in M^{-1}$) wegen $g \cdot \prod_i m_i \cdot g^{-1} = \prod_i (gm_ig^{-1}) \in N$.)

b) Es ist G/N abelsch $\Leftrightarrow gNhN = hNgN$ für alle $g,h \in G \Leftrightarrow N = (ghg^{-1}h^{-1})N$ für alle $g,h \in G \Leftrightarrow ghg^{-1}h^{-1} \in N$ für alle $g,h \in G \overset{(!)}{\Leftrightarrow} [G,G] \subseteq N$.
Die letzte Implikation „$\Leftarrow$" ist sicher richtig, die Implikation „$\Rightarrow$" gilt, weil N eine Untergruppe ist, also mit allen Kommutatoren $ghg^{-1}h^{-1}$ auch deren Erzeugnis $[G,G]$ umfasst.

c) Die Aussage klingt kompliziert, ist in Wirklichkeit aber eine direkte Folgerung des Homomorphiesatzes: Da H abelsch ist, gilt für alle Kommutatoren $xyx^{-1}y^{-1}$, dass
$\varphi(xyx^{-1}y^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1}\varphi(y)^{-1} = \varphi(x)\varphi(x)^{-1}\varphi(y)\varphi(y)^{-1} = e_H$,
also ist $[G,G] \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi)$. Dann aber besagt der Homomorphiesatz genau das, was wir zeigen wollen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Seien G und H Gruppen, $M \trianglelefteq G$ und $N \trianglelefteq H$ Normalteiler. Weiterhin sei $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige die folgenden Aussagen:

a) Das Urbild $\varphi^{-1}(N)$ ist ein Normalteiler in G.

b) Ist φ surjektiv, so ist $\varphi(M)$ ein Normalteiler in H.

c) Im Allgemeinen ist $\varphi(M)$ kein Normalteiler in H.

Lösung: Bild und Urbild einer Untergruppe sind immer eine Untergruppe. Das sollte man sich allgemein merken.

a) Das Urbild $\varphi^{-1}(N)$ ist nicht leer, denn $e_G \in \varphi^{-1}(N)$ wegen $\varphi(e_G) = e_H \in N$.
Seien $x,y \in \varphi^{-1}(N)$, also $\varphi(x), \varphi(y) \in N$. Dann ist $xy^{-1} \in \varphi^{-1}(N)$ wegen $\varphi(xy^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y)^{-1} \in N$.
Nach dem Untergruppenkriterium ist $\varphi^{-1}(N)$ eine Untergruppe von G.

Seien nun $x \in \varphi^{-1}(N)$ – also $\varphi(x) \in N$ – und $g \in G$ beliebig. Dann ist $\varphi(gxg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(x)\varphi(g)^{-1} \in N$, denn $\varphi(x) \in N$ und $\varphi(g) \in H$ und N ist ein Normalteiler in H.
Damit ist $gxg^{-1} \in \varphi^{-1}(N)$.

b) Das Bild $\varphi(M)$ ist nicht leer, denn $e_G \in M$ und damit $\varphi(e_G) = e_H \in \varphi(M)$.
Seien $x,y \in \varphi(M)$. Dann gibt es $m_1, m_2 \in M$ mit $\varphi(m_1) = x, \varphi(m_2) = y$.
Es ist $m_1m_2^{-1} \in M$ und es gilt $\varphi(m_1m_2^{-1}) = xy^{-1}$, also ist $\varphi(xy^{-1}) \in M$.
Nach dem Untergruppenkriterium ist $\varphi(M)$ eine Untergruppe von H.

Für die Normalteilereigenschaft benötigen wir die Surjektivität. Seien $x \in \varphi(M)$ und $h \in H$ beliebig. Dann gibt es $m \in M$ mit $\varphi(m) = x$ und weiterhin gibt es – wegen der Surjektivität von φ – ein $g \in G$ mit $\varphi(g) = h$. Da M ein Normalteiler in G ist, ist $gmg^{-1} \in M$ und damit $hxh^{-1} = \varphi(gmg^{-1}) \in \varphi(M)$, was zu zeigen war.

c) Sei $G := \langle(1\ 2)\rangle \leq S_3 =: H$. $G = M$ selbst ist sicher ein Normalteiler in G, aber unter der Einbettung $\varphi\colon G \hookrightarrow H$ wird G auf $\langle(1\ 2)\rangle \subseteq H$ abgebildet und das ist kein Normalteiler in H – das wurde etwa in der Vorlesung gezeigt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Gegeben seien die Gruppen $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{2\times 2} : \det(A) = 1\}$ und $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm I\}$.
In dieser Aufgabe wollen wir einsehen, dass $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ eine einfache Gruppe ist. Zeige dazu die folgenden Aussagen:

a) Alle Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$ bilden zusammen ein Erzeugendensystem von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Der Eintrag $*$ durchlaufe dabei ganz $\mathbb{C}$.

b) Sei $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Dann gibt es eine Matrix $S \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, so dass $S^{-1}AS$ in Jordan-Normalform ist.

c) Sei nun $N \trianglelefteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ mit $\{\pm I\} \subsetneq N$ gegeben. Dann enthält N alle Matrizen, wie sie in a) gegeben sind, und es gilt $N = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.
(*Hinweis:* Es ist hilfreich, die möglichen Jordan-Normalformen von $A \in N \setminus \{\pm I\}$ zu betrachten.)

d) $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ ist einfach.

Lösung:

a) Die gegebenen Matrizen besitzen alle Determinante 1. Es reicht, zu zeigen, dass eine beliebige Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ durch Multiplikation mit solchen Matrizen in die Einheitsmatrix überführt werden kann. Das geht durch Gauß-Algorithmus.
Fall 1: $c \neq 0$. Dann ist $A_1 := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & b' \\ c & d \end{pmatrix}$.
Weiterhin ist $A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix} \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$ und wegen $\det(A_2) = 1$ folgt $d' = 1$, also ist A_2 schon eine der gegebenen Matrizen, was die Aussage zeigt.
Fall 2: $c = 0$. In diesem Fall ist $a \neq 0$ (wegen der Determinante) und $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$ ist eine Matrix aus dem Fall 1.

b) Über $\mathbb{C}$ besitzt jede Matrix eine Jordannormalform, denn jedes Minimalpolynom zerfällt in Linearfaktoren. Also existiert eine Matrix $S_1 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, so dass $J(A) := S_1^{-1} \cdot A \cdot S_1$ die Jordannormalform ist.
Über $\mathbb{C}$ besitzt $\frac{1}{\det(S_1)}$ eine Quadratwurzel x und es sind $D := \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ sowie $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$ im Zentrum von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ enthaten.
Es folgt $J(A) = S_1^{-1} \cdot A \cdot S_1 = D^{-1} \cdot S_1^{-1} \cdot A \cdot S_1 \cdot D = (S_1 \cdot D)^{-1} \cdot A \cdot (S_1 \cdot D)$ und nach Konstruktion ist $\det(S_1 D) = \det(S_1) \cdot \det(D) = \det(S_1) \cdot x^2 = \det(S_1) \cdot \frac{1}{\det(S_1)} = 1$, also $S := S_1 D \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

c) **Vorüberlegung:** Seien zunächst $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ beliebig. A und B sind genau dann äquivalent, wenn sie die gleiche Jordannormalform haben, das ist (wie in b)) genau dann der Fall, wenn es eine Matrix $S \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ gibt mit $A = S^{-1}BS$.
Ist nun sogar $A \in N$, so folgt aus $A = S^{-1}BS$ weiterhin, dass auch $B \in N$ ist, denn N ist ein Normalteiler, also unter Konjugation abgeschlossen.

Nach a) reicht es, zu zeigen, dass alle Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$ in N enthalten sind. Das ist klar für die Einheitsmatrix, alle anderen Matrizen haben die Jordannormalform $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ – wer möchte, kann die 1 auch gerne über die Diagonale schreiben.
Mit der Vorüberlegung reicht es zu zeigen, dass $J \in N$, dafür reicht es zu zeigen, dass eine Matrix mit Jordannormalform J in N enthalten ist.

Dazu betrachten wir $A \in N, A \neq \pm I$. A besitzt zwei (nicht notwendigerweise veschiedene) Eigenwerte λ, μ und wegen $\det(A) = 1$ folgt $\lambda \cdot \mu = 1$. Für die Jordannormalform $J(A)$ verbleiben folgende Fälle:
Fall 1: $\lambda = \mu = 1$: Wegen $A \notin \{\pm I\}$ ist $J(A) \notin \{\pm I\}$ und damit ist $J(A) = J$ bereits die gesuchte Matrix.
Fall 2: $\lambda = \mu = -1$. Wegen $-I_2 \in N$ können wir $-A$ betrachten. $-A$ besitzt den doppelten Eigenwert 1 und wir sind im Fall 1.
Fall 3: $\lambda \neq \frac{1}{\lambda} = \mu$. Dann ist $J(A) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \in N$ die Jordannormalform von A.
Die Hilfsmatrix $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \in N$ besitzt ebenfalls $J(A)$ als Jordannormalform. Also ist auch $B \in N$.
Da N eine Untergruppe ist, ist auch $B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\lambda} & 1 \end{pmatrix} \in N$ enthalten und wir sind im Fall 1.

d) Sei $M \supsetneq \{I\}$ ein nichttrivialer Normalteiler von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Zu zeigen ist, dass $M \overset{(!)}{=} \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ ist.
Mit $\pi\colon\ \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ bezeichnen wir die kanonische Projektion. Diese ist surjektiv, also ist das Urbild $N := \pi^{-1}(M)$ nach Aufgabe 3b) ein Normalteiler in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Wegen $M \supsetneq \{I\}$ gilt $N \supsetneq \pi^{-1}(\{I\}) = \{\pm I\}$. Nach c) gilt also $N = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.
Da π surjektiv ist, gilt $\pi(\pi^{-1}(M)) = M$ (Übungsaufgabe LA 1), also insbesondere $M = \pi(N) = \pi(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, was zu zeigen war.