Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein   Dipl.-Math. Jochen Schröder

Einführung in Algebra und Zahlentheorie – Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Sei R ein Integritätsbereich[1]. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) R ist ein Körper.

(ii) R besitzt genau zwei Ideale.

(iii) R besitzt nur endlich viele Ideale.

Folgere, dass jeder endliche Integritätsbereich ein Körper ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ der kleinste Teilring von $\mathbb{R}$, der $\mathbb{Z}$ und $\sqrt{2}$ enthält. Zeige die nachfolgenden Aussagen:

a) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

b) Die Abbildung $N : (\mathbb{Z}[\sqrt{2}], \cdot) \to (\mathbb{Z}, \cdot)$, $a + b\sqrt{2} \mapsto a^2 - 2b^2$ ist ein Monoid-Homomorphismus.

c) $a + b\sqrt{2}$ ist genau dann in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$, wenn $a^2 - 2b^2 \in \{\pm 1\}$. Bestimme das Inverse von $7 + 5\sqrt{2}$.

d) Es gibt unendlich viele Einheiten in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Zeige, dass es keinen Ring mit genau 5 Einheiten geben kann.
(*Hinweis:* Was ist die Charakteristik eines solchen Ringes? Untersuche für eine Einheit a der Ordnung 5 das Element $1 + a^2 + a^3$!)

Aufgabe 4 (3 Punkte)

a) Seien R und S Ringe mit Charakteristik $\neq 0$. Zeige, dass $\mathrm{char}(S)$ ein Teiler von $\mathrm{char}(R)$ ist, wenn es einen Ringhomomorphismus zwischen R und S gibt.

b) Finde und beweise ein Kriterium, wann es einen Ringhomomorphismus zwischen den Restklassenringen $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$ mit $M, N \in \mathbb{Z}$ gibt.[2] (*Stichwort Homomorphiesatz*)

Aufgabe 5 (3 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring und I ein Ideal. Wir definieren das *Radikal* $\sqrt{I}$ von I durch

$$\sqrt{I} = \{a \in R : a^r \in I \text{ für ein } r \in \mathbb{N}\}.$$

Zeige, dass $\sqrt{I}$ ein Ideal ist.

Auf der Rückseite erzähle ich euch noch ein schönes Märchen.

[1] Insbesondere ist dann $R \neq \{0\}$.
[2] Es gibt dann sogar genau einen!

Zusatzaufgabe (4 Punkte) – Alle Jahre wieder ...
... versuchen wir, Schneewittchens Hochzeitspläne zu verstehen und zu berechnen, wann sie und ihr Prinz sich endlich das Ja-Wort geben können. Selbstverständlich scheitert die Hochzeit jedes Jahr erneut, nicht an der Mathematik, sondern an Schneewittchens Launen.[3]

Dieses Jahr ist alles anders. Schneewittchen hat geheiratet. Gerümpel konnte es noch gar nicht glauben, aber es war so. Vor wenigen Tagen war die Hochzeit nach jahrelanger Planung endlich über die Bühne gegangen und alle waren sie da gewesen: Die Zwerge, die Großmutter des Prinzen, Schneewittchens chinesischer Freund Li und sogar Dornröschen war rechtzeitig wach geworden.
Leider sah auch die Zwergenhöhle dementsprechend aus. Alle Ecken waren vollgestellt mit Zeugs und Gerümpel war eingeteilt, hier aufzuräumen – warum gerade er diesen Auftrag bekommen hatte, war ihm unklar, aber einer musste es halt machen. Glücklicherweise war er wenigstens nicht damit beauftragt worden, die Stühle der Tafel fortzuräumen, an der das Heer des Prinzen gesessen hatte. Das war Stapels und Schleppels Job – die zwar geflucht hatten, aber immerhin war der Prinz ja nur Herrscher[4] eines kleinen Landes und mehr als 1000 Soldaten hatte er nicht. Das wussten alle, auch wenn nicht einmal der Prinz genau zu sagen vermochte, wie groß sein Heer nun eigentlich genau war.

Oh, das Heer, Gerümpel erinnerte sich genau. Schneewittchen hatte darauf bestanden, dass die Soldaten in Reih' und Glied in den Ballsaal marschierten. „Kein Problem," hatte der Prinz gerufen und alle Soldaten sollten sich in einer Zweierreihe aufstellen, was auch wunderbar aufging, aber – wer hätte es anders erwartet – das gefiel Schneewittchen nicht. „Geht das nicht auch quadratisch?" nörgelte sie, aber da war natürlich nichts zu machen.
„Eine Dreierreihe geht auch nicht," berechnete Oberschlau schnell, „da würden zwei überbleiben, bei einer Fünferreihe gar drei."
Gerümpel erinnerte sich an den verzweifelten Gesichtsausdruck des Prinzen, als auch die Siebenerreihe scheiterte, doch bevor er auf die Idee kommen könnte, die übrig gebliebenen fünf Soldaten einfach in den Kerker zu werfen – wenn es um die Hochzeit ging, verstand der Prinz inzwischen keinen Spaß mehr – reihten sich die Soldaten zu acht nebeneinander und sogar Schneewittchen war zufrieden.

Doch wieviele Soldaten besitzt der Prinz nun eigentlich genau? Da es eh Zeit für eine Pause war – war es das nicht immer? – schnappte sich Gerümpel Zettel und Stift und hatte bald die richtige Anzahl berechnet.

Als die Zwerge später beim Abendessen zusammensaßen, erzählte Gerümpel den anderen von seiner Berechnung. Außer Oberschlau interessierte sich aber keiner wirklich dafür. „Dann hätte es ja doch eine prima[5] Aufstellung gegeben," ärgerte sich Oberschlau, der mit der Achterlösung von Anfang an nicht wirklich zufrieden gewesen war.
Doch gerade als sich Gerümpel an Teilbarkeitsregeln erinnerte, klingelte der Wecker...

Hätte Gerümpel nicht schon nach „Schneewittchen hat geheiratet." wissen müssen, dass es nur ein Traum sein kann? Wie reagierte Schneewittchen, als Gerümpel am Frühstückstisch von seinem Traum erzählte? Und wie viele Soldaten waren es denn nun wirklich? Für die Beantwortung der letzten Frage kannst du dir vier Punkte verdienen, für die vorherigen Fragen bekommst du höchstens einen finsteren Blick von Schneewittchen und vielleicht einen Apfel.

Abgabe der Übungsblätter:

Bitte wirf deine Lösung zu diesem Übungsblatt bis Donnerstag, 13. Juni 2013, 11:30 Uhr in den entsprechenden Abgabekasten im 1C-Teil des Allianzgebäudes oder gib sie deinem Übungsleiter direkt vor der großen Übung.

[3] Vielleicht liest dein Tutor dir diese Geschichte vor?
[4] Böse Zungen behaupten, nach der Hochzeit sah die Rollenverteilung ganz anders aus.
[5] Oberschlau meinte wohl „prime". [Anm. des Autors]