Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein   Dipl.-Math. Jochen Schröder

Einführung in Algebra und Zahlentheorie – Übungsblatt 12

Aufgabe 0 (0 Punkte)
Besuche das Sommerfest der Fakultät für Mathematik am 12.07.2013, ab 17:30 Uhr.
`http://www.math.kit.edu/event/sommerfest/`

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Berechne die Elementarteiler von $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}$. Gib unimodulare Matrizen L, R an, so dass LMR in Normalform ist.
Für $a, b \in \mathbb{Z}$ seien $c_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben. Untersuche jeweils, für welche a, b das lineare Gleichungssystem $Mz = c_1$ beziehungsweise $Mz = c_2$ lösbar ist und gib gegebenenfalls die Lösung an.

Aufgabe 2 (4 Punkte) – *eine alte Klausuraufgabe*
Sei G eine endliche abelsche Gruppe von Ordnung $n \in \mathbb{N}$. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) G ist zyklisch.

ii) Für alle Teiler d von n gibt es genau eine Untergruppe von G mit Ordnung d.

iii) Für alle Teiler d von n gibt es höchstens eine Untergruppe von G mit Ordnung d.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $R \neq 0$ ein kommutativer Ring. Zeige, dass R genau dann ein Hauptidealring ist, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ jeder R-Untermodul von R^n eine R-Basis besitzt.

Aufgabe 4 (4 Punkte) – *alte Klausuraufgaben, wo man hinschaut...*
Seien $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

a) Bestimme die Elementarteiler der Matrix $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

b) Bestimme die Elementarteiler der Matrix $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

c) Sei $n \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, es gelte $p^2 \nmid \det(M) \neq 0$ für alle $p \in \mathbb{P}$. Bestimme die Elementarteiler der Matrix M.

Abgabe der Übungsblätter:
Bitte wirf deine Lösung zu diesem Übungsblatt bis Donnerstag, 11. Juli 2013, 11:30 Uhr in den entsprechenden Abgabekasten im 1C-Teil des Allianzgebäudes oder gib sie deinem Übungsleiter direkt vor der großen Übung.