Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
Petra Forster

21.07.2008

Elementare Zahlentheorie Probeklausur

Aufgabe 1

Bestimmen Sie in $\mathbb{Q}[X]$ den größten gemeinsamen Teiler d von $f(X) = X^4 + 3X^2 + 2X + 1$ und $g(X) = X^3 + X^2 + 3$, und stellen Sie ihn als Linearkombination $af + bg = d$ mit $a, b \in \mathbb{Q}[X]$ dar.

Aufgabe 2

In wie vielen Primidealen des Ganzheitsrings R von $\mathbb{Q}(\sqrt{11})$ liegen die Primzahlen 2 bzw. 79? Geben Sie jeweils eine Basis der zugehörigen Ideale als freie abelsche Gruppen an! Finden Sie ein Beispiel einer Primzahl p, die in R in zwei verschiedenen Primidealen liegt.

Aufgabe 3

Ist $X^2 - 55 = 0$ in $\mathbb{Z}/151\mathbb{Z}$ lösbar? Für welche Primzahlen p ist $X^2 - 55$ in $\mathbb{Z}/(151 \cdot p)\mathbb{Z}$ lösbar?

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Einheitengruppe des Ganzheitsrings von $\mathbb{Q}(\sqrt{11})$.

Aufgabe 5

Zeigen Sie:

$$\varphi(a \cdot b) \cdot \varphi(\mathrm{ggT}(a, b)) = \varphi(a) \cdot \varphi(b) \cdot \mathrm{ggT}(a, b).$$

Aufgabe 6

(a) Geben Sie ein irreduzibles Polynom f vom Grad 2 über $\mathbb{F}_5$ an.

(b) Wie viele Elemente hat der Restklassenkörper $\mathbb{F}_5[X]/f \cdot \mathbb{F}_5[X]$?

(c) Konstruieren Sie in diesem Körper ein primitives Element.

Aufgabe 7

Sei U die von $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$ erzeugten Untergruppe.

(a) Bestimmen Sie die Elementarteiler e_1, e_2, e_3 von U in $\mathbb{Z}^3$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis $\{b_1, b_2, b_3\}$ von $\mathbb{Z}^3$, so dass $\{e_1 b_1, e_2 b_2, e_3 b_3\}$ eine Basis von U ist.

(c) Welchen Index hat U in $\mathbb{Z}^3$?