Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
Petra Forster

30.04.2008

Elementare Zahlentheorie – Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\zeta_3 := \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ und $\mathbb{Z}[\zeta_3] := \{a + b\zeta_3 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\zeta_3^3 = 1$, und $\mathbb{Z}[\zeta_3]$ ist ein Teilring von $\mathbb{C}$.

(b) $\mathbb{Z}[\zeta_3]$ ist bezüglich der Normabbildung

$$N : \mathbb{Z}[\zeta_3] \to \mathbb{N}_0,\ a + b\zeta_3 \mapsto |a + b\zeta_3|^2$$

ein euklidischer Ring.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ ein normiertes Polynom in $\mathbb{Z}[x]$. Zeigen Sie:
Ist $q \in \mathbb{Q}$ eine Nullstelle von $f(x)$, so liegt q bereits in $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Konstruieren Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}$, so dass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} v_5(a_n^2 + 1) = \infty.$$

Hinweis: Betrachten Sie Folgen der Form $a_{n+1} = a_n + 5^n \cdot k_n,\ k_n \in \mathbb{Z}$.

(b) Zeigen Sie, dass es keine solche Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}$ gibt, welche

$$\lim_{n\to\infty} v_7(a_n^2 + 1) = \infty$$

erfüllt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $d, g \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$ und d ein Teiler von $g - 1$.Weiter seien $z_i, i \in \mathbb{Z}$, so gewählt, dass
$a = \sum_{i=0}^{\infty} z_i g^i$,
wobei nur endlich viele z_i ungleich Null sind. Zeigen Sie:

$$d \mid a \Leftrightarrow d \mid \sum_{i=0}^{\infty} z_i.$$

Abgabe: Bis Mittwoch, den 07.05.2008, vor Beginn der Übung in den Kasten neben Zimmer 308 des Mathematikgebäudes.