Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
Petra Forster

07.04.2008

Elementare Zahlentheorie – Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Wir möchten uns überlegen, dass es Elemente im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ gibt, welche keine eindeutige Primzerlegung haben. Zeigen Sie dazu:

(a) Die Normabbildung

$$N : \mathbb{Z}[\sqrt{-13}] \to \mathbb{N}_0,\ a + b\sqrt{-13} \mapsto (a + b\sqrt{-13})(a - b\sqrt{-13}) = a^2 + 13b^2$$

ist multiplikativ.

(b) Die einzigen Einheiten in $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ sind 1 und -1. Nutzen Sie dazu die Normabbildung.

(c) Die Elemente $2, 7, 1-\sqrt{-13}, 1+\sqrt{-13}$ sind irreduzibel. Nutzen Sie auch hier die Normabbildung.

(d) Finden Sie nun ein Element dieses Ringes, welches keine eindeutige Primzerlegung besitzt. Begründen Sie ihre Wahl!

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Nach Aufgabe 1(b) des letzten Übungsblattes ist der Ring $\mathbb{Z}[\zeta_3]$ euklidisch. Folglich lässt sich jedes Element dieses Ringes eindeutig in Primfaktoren zerlegen. Nun können wir 13 in $\mathbb{Z}[\zeta_3]$ auf zwei Arten in irreduzible Elemente zerlegen:

$$13 = (1 + 2\sqrt{-3})(1 - 2\sqrt{-3}) = (\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2})(\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}).$$

Zeigen Sie, dass dies der eindeutigen Primzerlegung nicht widerspricht.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Nun möchten wir uns mit den Primelementen in $\mathbb{Z}[\zeta_3]$ beschäftigen.

(a) Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl. Zeigen Sie:
p ist nicht prim in $\mathbb{Z}[\zeta_3] \Leftrightarrow p = N(a)$ für ein $a \in \mathbb{Z}[\zeta_3]$.

(b) Überprüfen Sie die ersten 15 Primzahlen auf Irreduzibilität in $\mathbb{Z}[\zeta_3]$.

(c) Stellen Sie anhand dieser Beispiele eine Vermutung über die Gestalt der in $\mathbb{Z}[\zeta_3]$ irreduziblen bzw. reduziblen Primzahlen auf, und beweisen Sie Ihre Vermutung.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für eine Primzahl $p > 3$ gilt:
$\exists a \in \mathbb{Z} : p \mid a^2 + a + 1 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : p = 1 + 3n$.

(d) Wie sehen die Primelemente in $\mathbb{Z}[\zeta_3]$ aus?

Abgabe: Bis Mittwoch, den 14.05.2008, vor Beginn der Übung in den Kasten neben Zimmer 308 des Mathematikgebäudes.