Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
Petra Forster

14.05.2008

Elementare Zahlentheorie – Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen der Form $4k+1, k \in \mathbb{Z}$ gibt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Eine Zahl $a \in \mathbb{N}$ heißt vollkommen, wenn sie Summe ihrer echten Teiler ist, d.h. wenn gilt:

$$a = \sum_{\substack{d|a \\ d<a}} d.$$

Zeigen Sie:

(a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Zahl $2^n - 1$ höchstens dann prim, wenn n prim ist.
Bemerkung: Primzahlen dieser Gestalt heißen Mersenne-Primzahlen.

(b) Die Zahl $2^{n-1}(2^n - 1)$ ist genau dann vollkommen, wenn $2^n - 1$ prim ist.

(c) Geben Sie ein Beispiel einer vollkommenen Zahl an, welches größer als 28 ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Zahl $2^n + 1$ höchstens dann eine Primzahl, wenn n von der Form $n = 2^k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ ist.
Bemerkung: Zahlen der Form $2^{2^n} + 1, n \in \mathbb{N}_0$, heißen Fermat-Zahlen.

(b) Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $F_k := 2^{(2^k)} + 1$. Zeigen Sie, dass $\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Folgern sie aus (b), dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Zeigen Sie:
Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ existiert ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass

$$(a+b)^p = a^p + b^p + k \cdot p$$

gilt.

(b) Zeigen Sie die Fermatsche Vermutung (siehe Rückseite) für den Fall $n = 3$, d.h.

$$x^3 + y^3 = z^3$$

hat keine ganzzahlige Lösung, unter der Voraussetzung $3 \nmid xyz$.

Die Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

besitzt unendlich viele ganzzahlige positive Lösungen, die sogenannten pythagoräischen Tripel.
Im 17. Jahrhundert stellte Pierre de Fermat nun die Frage:
Gibt es auch ganzzahlige positive Lösungen der Gleichungen

$$x^n + y^n = z^n$$

für $n > 2$?
Fermat glaubte beweisen zu können, dass dies nicht der Fall ist, und schrieb folgende Randnotiz in sein Exemplar der Arithmetica des Diophant:
"Es ist unmöglich einen Kubus in zwei Kuben zu zerlegen, oder ein Biquadrat in zwei Biquadrate, oder allgemein irgendeine Potenz größer als die zweite in Potenzen gleichen Grades. Für diese Behauptung habe ich einen wahrhaft wunderbaren Beweis gefunden, aber dieser Rand ist zu schmal, um ihn zu fassen."
Allerdings gibt Fermat nur eine Lösung des Problems für $n = 4$ an, man nimmt aber an, er habe auch eine Lösung für den Fall $n = 3$ besessen. In der folgenden Zeit beschäftigten sich bekannte Mathematiker wie Gauss, Euler, Dirichlet, Lamé und Kummer mit der Fermatschen Vermutung, konnten sie allerdings nur für einige Spezialfälle beweisen. Daher galt die Fermatsche Vermutung lange Zeit als eines der größten ungelösten Probleme der Zahlentheorie, und es dauerte rund 350 Jahre bis Mitte der 1990er von Andrew Wiles ein vollständiger Beweis erbracht wurde. Dieser verwendet mathematische Methoden, welche Fermat damals sicher noch nicht zur Verfügung standen.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 21.05.2008, vor Beginn der Übung in den Kasten neben Zimmer 308 des Mathematikgebäudes.