

Elementare Zahlentheorie – Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Bestimme die Elementarteiler von $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ und unimodulare Matrizen $S, T \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$, so dass $S^{-1} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} T$ eine Elementarteilermatrix ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Ergänzen Sie $\begin{pmatrix} 105 \\ 70 \\ 42 \\ 30 \end{pmatrix}$ zu einer Basis von \mathbb{Z}^4 .

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Zeigen Sie:

$a \in \mathbb{N}$ ist genau dann ein Quadrat, wenn a eine ungerade Anzahl von natürlichen Teilern hat.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie:

$$\#\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \max(|x|, |y|) \leq N, \text{ggT}(x, y) = 1\right\} \cdot \frac{1}{4N^2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\zeta(2)}.$$

Abgabe: Bis Mittwoch, den 28.05.2008, vor Beginn der Übung in den Kasten neben Zimmer 308 des Mathematikgebäudes.