

Elementare Zahlentheorie – Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Eulerschen φ -Funktion:

(a) Es gilt

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

(b) Sei μ die Möbiusfunktion. Dann gilt:

$$\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)d = \varphi(n).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wie viele Untergruppen von Index $n \in \mathbb{N}$ hat \mathbb{Z}^2 ?

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Sei H eine Gruppe, G eine abelsche Gruppe und U eine Untergruppe von G . Weiter sei

$$\Phi : G \rightarrow H$$

ein Gruppenhomomorphismus mit $U \subseteq \text{Kern}(\Phi)$ und

$$\pi_U : G \rightarrow G/U, g \mapsto g + U$$

die kanonische Projektion. Zeigen Sie:

Es gibt genau einen Gruppenhomomorphismus

$$\tilde{\Phi} : G/U \rightarrow H,$$

so dass $\Phi = \tilde{\Phi} \circ \pi_U$ gilt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Untergruppen von endlichem Index in $(\mathbb{Q}, +)$.

(b) Zeigen Sie, dass es überabzählbar viele Untergruppen von Index 2 in $(\mathbb{Q}^\times, \cdot)$ gibt.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

„Ich will hier niemanden heiraten“ raunzte die Prinzessin nun schon etwas ungehalten. Eben hatte sie versucht, sich beim Reklamationschalter des renommierten Hotels „Zauberspiegel Inn“ Gehör zu verschaffen. Sie wollte nur sagen, dass sie schlecht geschlafen habe und ganz braun und blau sei nach dieser Nacht.

Rumpel stand seelenruhig am Reklamationschalter und zählte Erbsen. Diese Masche kannte er zur Genüge. Der Prinz war heute aber nicht da, er war zwar noch vorletzte Nacht hier gewesen, kommt aber nur alle vier Wochen für die Nacht von Samstag auf Sonntag. Was mit dem Bettensevice sei? Nun ja, in Zeiten wie diesen könne er eben nur alle 5 Tage das Bettchen frisch machen, und Humpel käme erst in zwei Tagen wieder. Und die Äpfel gestern abend hätten komisch geschmeckt? Zugegeben, die waren nicht mehr ganz frisch, aber noch nächsten Freitag komme die Lieferung, die regelmäßig alle 99 Tage hier eintreffe.

Wann könnte die Prinzessin kommen, um nach dem Verzehr eines frischen gelieferten Apfels abends aus einem frisch bezogenem Bettchen den Prinzen im Nebenzimmer anrufen zu können, um ihm zu sagen, dass sie ihn nicht heiraten will?

Gar nicht leicht. Eigentlich hätte Rumpel gerne Oberschlau zu Rate gezogen. Dieser war aber eine Woche zuvor von chinesischen Piraten um Hilfe bei der Aufteilung eines Schatzes gebeten worden und noch nicht zurückgekehrt. Was war die Lösung für Rumpels Problem? Hat es sich die Prinzessin bis dahin vielleicht anders überlegt?

Abgabe: Bis Mittwoch, den 04.06.2008, vor Beginn der Übung in den Kasten neben Zimmer 308 des Mathematikgebäudes.