Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
Petra Forster

04.06.2008

Elementare Zahlentheorie – Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie:
Das Polynom x^2+x+1 hat genau dann in $\mathbb{F}_p$ eine Nullstelle, wenn $p \equiv 1 \mod 3$ ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Wir wissen, dass es eine Primzahl $p < 350$ gibt, welche ein Teiler von $2^{131}-1$ ist. Bestimmen sie diesen Primteiler.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Sei $F_n := 2^{(2^n)}+1$ eine Primzahl. Zeigen Sie:
Ein $a \in \mathbb{Z}$ erzeugt genau dann die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/F_n\mathbb{Z})^\times$, wenn a kein Quadrat modulo F_n ist.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Zeigen Sie:
Sei p eine Primzahl und $n = p^m$. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von

$$\{a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \mid a^{n-1} \equiv 1 \mod n\}.$$

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt Carmichaelzahl, wenn sie keine Primzahl ist und für alle $a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ gilt $a^{n-1} \equiv 1 \mod n$.
Zeigen Sie:
n ist genau dann eine Carmichaelzahl, wenn sie von der Form $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$, $k > 2$, mit verschiedenen ungeraden Primzahlen p_i, $i = 1, \ldots, k$, für welche $p_i - 1 \mid n-1$ gilt.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$9x^2 + 25y^2 - 225z^2 = 0.$$

Abgabe: Bis Mittwoch, den 11.06.2008, vor Beginn der Übung in den Kasten neben Zimmer 308 des Mathematikgebäudes.