Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
Petra Forster

02.07.2008

Elementare Zahlentheorie – Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Sei R ein kommutativer Ring und $I, J \subseteq R$ Ideale mit $1 \in I + J$. Dann gilt:

$$I \cap J = I \cdot J.$$

(b) Sei K ein quadratischer Zahlkörper, P ein Primideal in O_K mit $I \not\subseteq P$. Dann gilt

$$N(I \cdot P) = N(I) \cdot N(P).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gitter, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, kompakt und es gilt $X = -X$. Weiter sei

$$\mathrm{vol}(X) \geq 2^n \,\mathrm{vol}(\Gamma).$$

Dann existiert ein $0 \neq \gamma \in \Gamma \cap X$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Ganzheitsring von $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ein Hauptidealring ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $d \in \mathbb{N}$ kein Quadrat.

(a) Zeigen Sie:
Ist $(x, y) \in \mathbb{N}$ eine Lösung der Pellschen Gleichung

$$x^2 - dy^2 = 1$$

mit $x > \frac{1}{2}y^2 - 1$, so erzeugen $x + \sqrt{d}y$ und -1 die Einheiten von Norm 1 in $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

(b) Bestimmen Sie die Einheiten im Ganzheitsring von $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 09.07.2008, vor Beginn der Übung in den Kasten neben Zimmer 308 des Mathematikgebäudes.