Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
Petra Forster

09.07.2008

Elementare Zahlentheorie – Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}, a_i, b_i \geq 1$ für $i = 1, \ldots, n$ und $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ für $i = 0, \ldots, n-1$.
Zeigen Sie:
Wenn $[a_0, \ldots, a_n] = [b_0, \ldots, b_n]$ gilt, so ist $a_i = b_i$ für $0 \leq i \leq n$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(a,b) = 1$. Seien $a_0, \ldots, a_l$ gegeben durch den euklidischen Algorithmus angewandt auf a und b:

$$\begin{aligned} a &= a_0 \cdot b + r_0, \quad r_0 < b, \\ b &= a_1 \cdot r_0 + r_1, \quad r_1 < r_0, \\ &\vdots \\ r_{l-2} &= a_l \cdot r_{l-1}, \quad r_{l-1} = 1. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\frac{a}{b} = [a_0, \ldots, a_l]$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{23}$.

(b) Bestimmen Sie die ersten 4 Konvergenten $\frac{p_i}{q_i}$, $i = 1, \ldots, 4$, von $\sqrt{23}$, und berechnen Siejeweils die Norm von $p_i + \sqrt{23} q_i$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die Erde benötigt etwa

$$t := 365 + \frac{104629}{432000}$$

Tage, um die Sonne zu umrunden. Berechnen Sie die Kettenbruchentwicklung von t, sowie die erste, zweite und sechste Konvergente. Erklären Sie damit das Prinzip der Schaltjahre des noch heute gültigen gregorianischen Kalenders.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 16.07.2008, vor Beginn der Übung in den Kasten neben Zimmer 308 des Mathematikgebäudes.