Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
Petra Forster

23.04.2008

Elementare Zahlentheorie – Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{N}$ und $a \geq b$. Mithilfe des euklidischen Algorithmus kann nun der größte gemeinsame Teiler dieser Zahlen bestimmt werden. Dabei werden sukzessive Divisionen mit Rest ausgeführt. Der Algorithmus bricht ab, sobald in einer Division der Rest Null erhalten wird. Der größte gemeinsame Teiler ist dann der Rest aus der vorherigen Division. Sei

$$F_0 := 0,\ F_1 := 1 \text{ und } F_{n+1} := F_n + F_{n-1}.$$

$(F_n)_n$ heißt die Folge der Fibonacci-Zahlen. Zeigen Sie:
Benötigt der Algorithmus n Schritte, um $\mathrm{ggT}(a, b)$ zu bestimmen, so ist $a \geq F_{n+2}$ und $b \geq F_{n+1}$ für $n \geq 2$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler d von $x = 2359$ und $y = 1057$, und stellen Sie ihn als Linearkombination $ax + by = d$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ dar.

(b) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler d der Polynome $f = X^3 + X^2 - 2$ und $g = X^4 - X^3 - X + 1$, und stellen Sie ihn als Linearkombination $af + bg = d$ mit $a, b \in \mathbb{Q}[X]$ dar.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Z}^{2\times 2} \mid \det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = 1\}$ von den Elementen $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ erzeugt wird. Das bedeutet, dass jedes $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ dargestellt werden kann als

$$A = M_1 \cdot M_2 \cdots M_n$$

mit $M_i \in \{S, T, S^{-1}, T^{-1}\}, i \in \{1, \ldots, n\}$.

Hinweis: Wenden Sie den euklidischen Algorithmus auf die erste Spalte von $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ an.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie ohne Verwendung der eindeutigen Primfaktorzerlegung folgenden Zusammenhang zwischen dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen und dem größten gemeinsamen Teiler:

$$\mathrm{kgV}(a, b) \cdot \mathrm{ggT}(a, b) = a \cdot b.$$

Abgabe: Bis Mittwoch, den 30.04.2008, vor Beginn der Übung in den Kasten neben Zimmer 308 des Mathematikgebäudes.