Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
Petra Forster

07.04.2008

Elementare Zahlentheorie – Übungsblatt 4

Lösung zu Aufgabe 3c):

zeige: p reduzibel $\Rightarrow$ $p = 3$ oder $p = 1 + 3n, n \in \mathbb{Z}$

p reduzibel $\Rightarrow \exists x + y\zeta_3 \in \mathbb{Z}[\zeta_3] : p = N(x + y\zeta_3) = (x - \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 \Rightarrow 4p = (2x - y)^2 + 3y^2$.

Fall1: $2x - y = 3m$ für ein $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow (2x - y)^2 = 3 \cdot 3m^2 \Rightarrow 4p = 3 \cdot (3m^2 + y^2) \Rightarrow 3 \mid p \Rightarrow p = 3$.

Fall2: $2x - y = 1 + 3m$ oder $2x - y = 2 + 3m$ für ein $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow (2x - y)^2 = 1 + 3v, v \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4p = 1 + 3 \cdot (v + y^2)$.
Angenommen $p = 3$. Dann folgt $3 \mid 1 + 3 \cdot (v + y^2)$ ↯ .
Für $p = 2 + 3z$ folgte $4p = 8 + 12z = 1 + 3 \cdot (v + y^2) \Rightarrow 2 = 1 + 3 \cdot (v + y^2 - 4z)$ ↯ .
Folglich ist $p = 1 + 3z$ für ein $z \in \mathbb{Z}$.

Lösung Aufgabe 3d):

Behauptung: Jedes Primelement in $\mathbb{Z}[\zeta_3]$ ist assoziert zu einem $p = 2 + 3z, z \in \mathbb{Z}$ oder zu $a + b\zeta_3, a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a^2 - ab + b^2 = p$ für $p = 3$ oder $p = 1 + 3z, z \in \mathbb{Z}$.

Sei $\pi \in \mathbb{Z}[\zeta_3]$ ein Primelement mit $\pi \mid p$.

Fall1: $p = 2 + 3z$
$\pi \mid p \Rightarrow \exists b \in \mathbb{Z}[\zeta_3] : \pi \cdot b = p \Rightarrow b \in \mathbb{Z}[\zeta_3]^\times$, da p irreduzibel $\Rightarrow \pi$ ist assoziiert zu p.

Fall2: $p = 3$ oder $p = 1 + 3z$
$\pi \mid p \Rightarrow \exists a \in \mathbb{Z}[\zeta_3] \setminus \mathbb{Z}[\zeta_3]^\times : p = N(a) = a \cdot \bar{a} \Rightarrow \pi \mid a$ oder $\pi \mid \bar{a} \Rightarrow \exists b \in \mathbb{Z} : \pi \cdot b = p$.
Da p prim in $\mathbb{Z}$, sind a und $\bar{a}$ irreduzibel. Denn sonst gäbe es $x, y \in \mathbb{Z}[\zeta_3]$ mit $a = N(x), \bar{a} = N(y)$, und folglich wäre $p = N(x) \cdot N(y)$ ↯ .
Dann folgt: O.E. $\pi \cdot b = a \Rightarrow b \in \mathbb{Z}[\zeta_3]^\times$, da a irreduzibel $\Rightarrow \pi$ ist assoziiert zu $a = u + v\zeta_3 \in \mathbb{Z}[\zeta_3]$ mit $u^2 - uv + v^2 = N(a) = p$.