Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. Ute Luhm
Dr. Florian Nisbach

18. März 2013

Musterlösungen zur Funktionentheorie II-Klausur vom 14. März 2013

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Formulieren Sie den Cauchyschen Integralsatz für nullhomologe Wege sowie seine Umkehrung.

b) Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\varphi\colon U \to V$ eine holomorphe Abbildung und $\gamma\colon [0,1] \to U$ ein geschlossener, glatter Weg. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\gamma \text{ ist nullhomolog in } U \Rightarrow \varphi \circ \gamma \text{ ist nullhomolog in } V.$$

Lösung:

a) Der Cauchysche Integralsatz für nullhomologe Wege lautet:

> Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und γ ein geschlossener, stückweise glatter, in U nullhomologer Weg in U. Dann gilt:
>
> $$\forall f \in H(U): \int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Die Umkehrung des Cauchyschen Integralsatzes für nullhomologe Wege lautet:

> Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und γ ein geschlossener, stückweise glatter Weg in U, sodass für alle $f \in H(U)$ gilt: $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. Dann gilt: γ ist nullhomolog in U.

b) *Lösungsmöglichkeit 1:* Wir benutzen beide Richtungen aus a).
Sei dazu γ nullhomolog in U.

$$\overset{\text{a)}}{\Rightarrow} \forall f \in H(U): \int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \forall g \in H(V): \int_{\varphi\circ\gamma} g(z)dz &= \int_0^1 g(\varphi(\gamma(t))) \cdot (\varphi\circ\gamma)'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 (g\circ\varphi)(\gamma(t)) \cdot \varphi'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt \\ &= \int_\gamma \underbrace{g\circ\varphi(z)\cdot\varphi'(z)}_{\text{holomorph auf } U}\,dz = 0\end{aligned}$$

$$\overset{\text{a)}}{\Rightarrow} \varphi\circ\gamma \text{ ist nullhomolog in } V.$$

Lösungsmöglichkeit 2: Man rechnet direkt nach, dass $\varphi \circ \gamma$ nullhomolog in V ist, benötigt also nicht die Umkehrung des CIS aus Teil a).
Sei also $z \in \mathbb{C} \setminus V$. Dann gilt:

$$2\pi i \cdot \mathrm{ind}_{\varphi\circ\gamma}(z) = \int_{\varphi\circ\gamma} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \int_0^1 \frac{\varphi'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}{\varphi(\gamma(t)) - z}\,\mathrm{d}t = \int_\gamma \frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta) - z}\,\mathrm{d}\zeta = 0.$$

Der Integrationskern $\frac{\varphi'(\zeta)}{\varphi(\zeta)-z}$ im letzten Integral ist wegen $z \notin V \supseteq \varphi(U)$ auf U holomorph. Somit ist die erste Hälfte von a) anwendbar, um die letzte Identität zu erhalten.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $U := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$. Für eine holomorphe Funktion $f\colon U \to U$ und $k \in \mathbb{N}_{>0}$ seien

$$f_k\colon U \to \mathbb{C},\ z \mapsto \underbrace{(f \circ \cdots \circ f)}_{k \text{ mal}}(z) \quad \text{und}$$
$$f^k\colon U \to \mathbb{C},\ z \mapsto (f(z))^k$$

definiert.

a) Formulieren Sie den Auswahlsatz von Montel.

b) Zeigen Sie, dass die Familie $\mathcal{F}_1 := \{f_k \mid k \in \mathbb{N}_{>0}\}$ für jedes holomorphe $f\colon U \to U$ normal ist.

c) Finden Sie ein holomorphes $f\colon U \to U$, sodass $\mathcal{F}_2 := \{f^k \mid k \in \mathbb{N}_{>0}\}$ nicht normal ist.

Lösung:

a) Der Auswahlsatz von Montel lautet:

> Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $\mathcal{F} \subseteq H(U)$. Dann sind äquivalent:
> (i) $\mathcal{F}$ ist normal.
> (ii) $\mathcal{F}$ ist lokal gleichmäßig beschränkt.
> (iii) $\mathcal{F}$ ist punktweise beschränkt und lokal gleichgradig stetig.

b) Wegen $f(U) \subseteq U$ gilt auch $f_k(U) \subseteq U$ für jedes $k \in \mathbb{N}_{>0}$.
$\Rightarrow \forall\, k \in \mathbb{N}_{>0}\ \forall\, z \in U:\ |f_k(z)| < 2$
$\Rightarrow \mathcal{F}_1$ ist lokal gleichmäßig beschränkt (sogar gleichmäßig beschränkt).
$\overset{\text{Montel}}{\Rightarrow} \mathcal{F}_1$ ist normal.

c) Sei $f := \mathrm{id}_U$.
$\Rightarrow \forall\, k \in \mathbb{N}_{>0} : |f^k(\frac{3}{2})| = |f(\frac{3}{2})|^k = (\frac{3}{2})^k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$
$\Rightarrow \mathcal{F}_2$ ist nicht punktweise beschränkt.
$\overset{\text{Montel}}{\Rightarrow} \mathcal{F}_2$ ist nicht normal.

Ebenso bekommt man natürlich ein Gegenbeispiel, wenn man für f eine konstante Funktion $f(z) = c$ mit $1 < |c| < 2$ nimmt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $f, g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ biholomorph mit $f(0) = g(0) = 0$. Weiterhin gebe es $a, b \in \mathbb{D}$ mit $f'(a) = g'(b)$. Zeigen Sie, dass dann gilt: $f = g$.

Lösung 1:

$f, g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ biholomorph mit $f(0) = g(0) = 0$

$\Rightarrow f, g$ sind laut Vorlesung Drehungen.

$\Rightarrow$ Es gibt $\alpha, \beta \in \partial\mathbb{D}$ mit $\forall\, z \in \mathbb{D}:\ f(z) = \alpha z$ und $\forall\, z \in \mathbb{D}:\ g(z) = \beta z$.

$\Rightarrow \alpha = f'(a) = g'(b) = \beta$

$\Rightarrow f = g$

Lösung 2:

$f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \Rightarrow$ Es gibt $c \in \partial\mathbb{D}$ und $a \in \mathbb{D}$ mit $\forall\, z \in \mathbb{D}:\ f(z) = c \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

$\Rightarrow 0 = f(0) = c \cdot \frac{-a}{1} = -ac \overset{c\neq 0}{\Rightarrow} a = 0$

$\Rightarrow \forall\, z \in \mathbb{D}:\ f(z) = cz$

genauso: Es gibt ein $d \in \partial\mathbb{D}$ mit $\forall\, z \in \mathbb{D}:\ g(z) = dz$

$\Rightarrow c = f'(a) = g'(b) = d$

$\Rightarrow f = g$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\Lambda := \{r\omega_1 + s\omega_2 \mid r,\ s \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $\wp := \wp_\Lambda$ die dazugehörige Weierstraßsche $\wp$-Funktion. Weiterhin sei $P := \{t_1\,\omega_1 + t_2\,\omega_2 \mid t_1, t_2 \in [0,1)\}$ das dazugehörige Periodenparallelogramm.

a) Zeigen Sie, dass durch $g(z) := (\wp(z))^2 \cdot \wp'(z)$ eine Λ-elliptische Funktion gegeben ist.

b) Bestimmen Sie sämtliche Polstellen von g in P und deren Ordnungen.

c) Zeigen Sie, dass für jedes $c \in \mathbb{C}$ die Gleichung

$$g(z) = c$$

in P höchstens 7 verschiedene Lösungen besitzt.

Lösung:

a) $\forall\, \omega \in \Lambda:\ g(z+\omega) = (\wp(z+\omega))^2 \cdot \wp'(z+\omega) \overset{\wp,\wp'\text{elliptisch}}{=} (\wp(z))^2 \cdot \wp'(z) = g(z)$

$\Rightarrow g$ ist elliptisch.

b) $\wp$ hat in 0 einen Pol der Ordnung 2 und in P sonst keine Pole.

$\wp'$ hat in 0 einen Pol der Ordnung 3 und in P sonst keine Pole.

$\Rightarrow g$ hat in 0 einen Pol der Ordnung $2+2+3 = 7$ und in P sonst keine Pole.

c) Nach dem dritten Satz von Liouville nimmt g in P jeden Wert (mit Vielfachheiten gerechnet) gleich oft an. Da g den Wert ∞ in P (mit Vielfachheiten gerechnet) genau 7-mal annimmt, wird auch der Wert c (mit Vielfachheiten gerechnet) genau 7-mal angenommen, d.h. es gibt höchstens 7 paarweise verschiedene Lösungen von $g(z) = c$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden unendlichen Produkte auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

a) $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

b) $\prod_{n=3}^{\infty} \left(1 - \frac{4}{n^2}\right)$.

Lösung:

a) Offensichtlich sind alle Faktoren des unendlichen Produkts ungleich 0.

Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ sei $p_n := \prod\limits_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k})$.

$\Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}_{\geq 2} :\ p_n = \prod\limits_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k}) = \prod\limits_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \overset{\text{Teleskop}}{=} \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\Rightarrow \prod\limits_{k=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{k})$ ist nach Definition nicht konvergent.

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ sei $p_n := \prod\limits_{k=3}^{n} (1 - \frac{4}{k^2})$.

$\Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}_{\geq 3} :\ p_n = \prod\limits_{k=3}^{n} (1 - \frac{4}{k^2}) = \prod\limits_{k=3}^{n} \frac{k^2-4}{k^2} = \prod\limits_{k=3}^{n} \frac{(k+2)\cdot(k-2)}{k\cdot k} = \prod\limits_{k=3}^{n} \frac{k+2}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k-2}{k-1} =$
$\prod\limits_{k=3}^{n} \frac{k+2}{k+1} \cdot \prod\limits_{k=3}^{n} \frac{k+1}{k} \cdot \prod\limits_{k=3}^{n} \frac{k-1}{k} \cdot \prod\limits_{k=3}^{n} \frac{k-2}{k-1} \overset{\text{Teleskop}}{=} \frac{n+2}{4} \cdot \frac{n+1}{3} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{n^2+3n+2}{6n^2-6n}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+2}{6n^2-6n} = \frac{1}{6} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow \prod\limits_{k=3}^{\infty} (1 - \frac{4}{k^2})$ ist konvergent gegen $\frac{1}{6}$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Residuen der folgenden Differentialformen $\omega, \tau \in \Omega(\hat{\mathbb{C}})$ in jedem Punkt $P \in \hat{\mathbb{C}}$.

a) $\omega := \mathrm{d}z = \mathrm{d}(\mathrm{id}_{\hat{\mathbb{C}}})$.

b) $\tau := \frac{1}{z(z-1)} \cdot \mathrm{d}z$.

Lösung:

a) $\omega = dz = 1 \cdot dz$

Die Funktion 1 hat in $\mathbb{C}$ keine Pole.

$\Rightarrow \forall\, P \in \mathbb{C}: \ \operatorname{res}_P(\omega) = \operatorname{res}_P(1) = 0$

$\Rightarrow \operatorname{res}_\infty(\omega) \overset{\text{Residuensatz}}{=} -\sum\limits_{P\in\mathbb{C}} \operatorname{res}_P(\omega) = 0$

b) $\tau = \frac{1}{z\cdot(z-1)} \cdot dz = (\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}) \cdot dz$

Die Funktion $\frac{1}{z\cdot(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$ hat in $\mathbb{C}$ genau die Pole 0 und 1.

$\Rightarrow \forall\, P \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}: \ \operatorname{res}_P(\tau) = \operatorname{res}_P(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}) = 0$

In den Punkten 0 und 1 gilt $\operatorname{res}_0(\tau) = \operatorname{res}_0(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}) = -1$ und $\operatorname{res}_1(\tau) = \operatorname{res}_1(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}) = 1$.

$\Rightarrow \operatorname{res}_\infty(\tau) \overset{\text{Residuensatz}}{=} -\sum\limits_{P\in\mathbb{C}} \operatorname{res}_P(\tau) = -(\operatorname{res}_0(\tau) + \operatorname{res}_1(\tau)) = 0$