Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie
JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen
Dr. Björn Mützel

Geometrische Gruppentheorie (SS 2014)
Übungsblatt 4

Stichwörter: Bäume, Gruppenaktionen, Fundamentalbereiche.

Abgabe: Bis Mittwoch, 14.05., 15:45 Uhr im Briefkasten der Vorlesung oder in der Übungsstunde.

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Sei $T = (V, E, \delta, \iota)$ ein ungerichteter Baum mit endlich vielen Ecken und Kanten. Eine Ecke $v \in V$ heißt *Blatt* von T, falls $\mathrm{val}(v) = 1$.

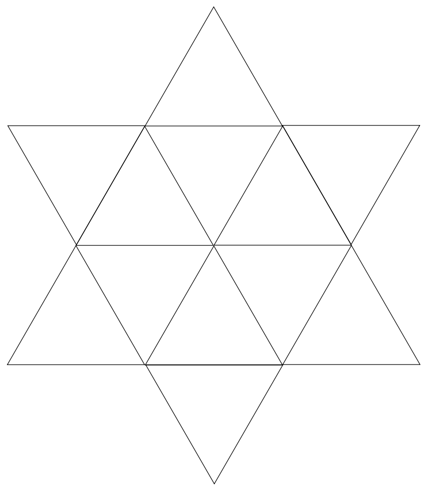
a) Zeige, dass $\#V = \#E + 1$.
b) Sei $\#V \geq 2$. Sei weiterhin $L = (v_i, \mathrm{val}(v_i))_{i=1,..,m}$ eine Liste der Ecken v_i von T mit Valenz $\mathrm{val}(v_i) \geq 3$. Bestimme eine Formel, mit der man die Anzahl der Blätter aus der Liste L berechnen kann.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Zeige, dass jeder zusammenhängende Graph mit abzählbar vielen Ecken und Kanten einen aufspannenden Teilbaum enthält. Dabei ist ein *aufspannender Teilbaum* ein Teilgraph, der ein Baum ist und alle Ecken des ursprünglichen Graphen enthält.

Aufgabe 3 (9 Punkte)
Bekanntlich kann man die Ebene $\mathbb{R}^2$ mit abgeschlossenen gleichseitigen Dreiecken pflastern. Wir wählen die Pflasterung $P = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \triangle_i$ so, dass eines der paarweisen kongruenten Dreiecke das Dreieck $\triangle(a,b,c) \subset \mathbb{R}^2$ mit Ecken $a = (0,0), b = (1,0)$ und $c = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ ist und so dass P die Ebene wie auf der Rückseite veranschaulicht pflastert.
Sei $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ die Menge der Spiegelungen an den Geraden durch die Seiten von $\triangle(a,b,c)$. Sei $G = \langle S \rangle$ die von S erzeugte Untergruppe der Isometriegruppe des $\mathbb{R}^2$.

a) Zeige, dass G Dreiecke der Pflasterung auf Dreiecke der Pflasterung abbildet.
b) Zeige, dass $\triangle(a,b,c)$ ein Fundamentalbereich für die Aktion von G auf $\mathbb{R}^2$ ist. Das heißt:
   i) Für alle $x \in \mathbb{R}^2$ existiert ein $g \in G$, so dass $g(x) \in \triangle(a,b,c)$.
   ii) Für alle $x, y \in \triangle(a,b,c)$ mit $x \neq y$ gilt: Ist $g(x) = y$, so liegen x und y auf dem Rand von $\triangle(a,b,c)$.
c) Finde einen in $\mathbb{R}^2$ eingebetteten Graphen, der isomorph zum Cayleygraphen $\Gamma(G,S)$ ist.

Bitte wenden!



Pflasterung P der Ebene mit Dreiecken.