Intervallaustauschtransformationen, Flüsse und das Lemma von Masur

Gregor Bethlen

1 Intervallaustauschtransformationen

Stets sei in diesem Abschnitt $I := [a, b]$ ein Intervall und $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$.

Definition und Bemerkung 1.1

1) Eine **Intervallaustauschtransformation** (IAT) ist eine bijektive Abbildung $T : I \setminus \{a_0, a_1, \ldots, a_k\} \to \operatorname{Bild} T \subseteq I$ so, daß T eine Verschiebung auf den durch die a_i begrenzten Teilintervallen ist. Sofern möglich, setzen wir T in den Punkten a_i geeignet fort (halbseitig stetig so, daß die Bijektivität erhalten bleibt).

2) Für eine IAT T ist auch T^z für $z \in \mathbb{Z}$ eine IAT.

3) Für $C(T) := \{x \in I : \exists n > 0, m < 0 : T^n(x) = \perp, T^m(x) = \perp\}$ gilt: $|C(T)| < \infty$. Sei $C(T) := \{b_0, \ldots, b_d\}$, $J_i := (b_{i-1}, b_i), i = 1, \ldots, d$. Setze $d := 1$ und $J_1 := I$, falls $C(T) = \emptyset$. ■

Korollar 1.2 Es existieren eindeutige $K_1, \ldots, K_s \subseteq I$ mit

- $K_i = \bigcup_{j \in A} J_j$, wobei $A \subseteq \{1, \ldots, d\}$
- $K_i \cap K_j = \emptyset$ für $i \neq j$
- $\bigcup_{i=1}^{s} K_i = I \setminus C(T)$
- $T(K_i) = K_i$

so, daß für $i = 1, \ldots, s$ gilt:

- Entweder besteht K_i aus Intervallen gleicher Länge, die zyklisch vertauscht werden (in dem Fall heißt K_i eine **periodische** Komponente von T)
- oder $T|_{K_i}$ ist minimal, das heißt für alle $x \in K_i$, für die $T^n(x)$ für alle $n \geq 0$ definiert ist, gilt: $(T^n(x))_{n \geq 0}$ ist dicht in K_i (in dem Fall heißt K_i eine **minimale** Komponente von T).

T heißt **minimal**, wenn $s = 1$ und K_1 minimal. ■

Korollar 1.3 Für $C(T) = \emptyset$ gilt: $T = \mathrm{id}$ oder T minimal. ■

2 Intervallaustauschtransformationen und Translationsstrukturen

Stets sei in diesem Abschnitt M eine Fläche mit Translationsstruktur ω ohne hebbare Singularitäten und $v \in S^1$ eine Richtung. I sei ein geodätisches Intervall senkrecht zu v, wobei I keine singulären Punkte enthalten darf; Beginn und Ende von I dürfen zusammenfallen. Der Fluß $\Phi := \Phi_v^\omega : (\mathbb{R} \times M) \to M$ bezeichne immer den Fluß auf M (sowie ω) in Richtung v.

Sei $x \in I$. Der Strahl (Trajektorie) in Richtung v, der in x beginnt (bezeichnet mit $s_v(x) \subseteq M$), treffe als ersten Punkt aus I $y \in I$. In diesem Fall definiere $T(x) := y$.

Satz 2.1 T ist eine IAT. Die Anzahl der ausgetauschten Teilintervalle (also das k aus dem vorigen Abschnitt) ist beschränkt durch eine Konstante, die nur von ω abhängt. Jeder $s_v(x), x \in I$, kehrt entweder zu I zurück oder er trifft eine Singularität, bevor er zu I zurückkehrt. Er tut dies innerhalb einer Zeitspanne, die durch eine von x unabhängige Konstante beschränkt ist. Für ein Teilintervall ist die Zeit bis zur Wiederkehr zu I konstant.

Beweis Bezeichne mit a und b die Randpunkte von I; beachte, daß $a = b$ möglich. Seien $x_1, \ldots, x_n \in I$ so, daß $s_v(x_i)$ eine Singularität triff bevor er zu I zurückkehrt (die x_i sind also gerade die Definitionslücken von T). Dann ist n sicher kleiner als die Summe der Vielfachheiten aller Singularitäten. Wir betrachten nun die Punkte, die von T auf a oder b abgebildet werden – dies sind höchstens zwei Punkte, etwa y und z. Die Teilintervalle sind dann gerade durch $x_1, \ldots, x_n, a, b, y, z$ begrenzt. Also ist die Anzahl der Teilintervalle unabhängig von I, und damit auch von v, beschränkt. Wir setzen nun aus Gründen der Übersicht a, b, y, z als zusätzliche x_i.

Sei $J \subseteq I$ eines der Teilintervalle, das durch benachbarte x_i begrenzt wird; die Länge von J sei j. Mit A bezeichnen wir den Flächeninhalt von M. Die Strahlen ausgehend von J müssen J wieder treffen (andernfalls übersteigt das Produkt von j und Strahllänge irgendwann A). Also treffen sie auch I. Falls nicht die ganze »Breitseite« der Strahlen gleichzeitig auf I trifft, muß ein Strahl zuerst entweder eine Singularität oder einen Randpunkt von I treffen. Dies ist aber ausgeschlossen.

Beachte, daß diese Argumentation auch funktioniert für die Randpunkte a oder b, sofern sie keine Singularitäten treffen. Hiermit haben wir insbesondere gezeigt, daß alle $x \in I$, deren Strahl keine Singularität trifft, wieder zu I zurückkehren.

Außerdem ist $T|_J$ eine Verschiebung. Damit ist T eine IAT. ∎

Definition 2.2 Eine **Sattelverbindung** ist ein geodätisches Intervall, das zwei Singularitäten verbindet und keine Singularitäten im Inneren hat. ∎

Sattelverbindungen, die parallel zu v verlaufen, spielen für Φ die Rolle, die $C(T)$ bei einer IAT T spielt.

Hilfssatz 2.3 Sei I ein geodätisches Intervall auf M senkrecht zu v; I enthalte keine Singularitäten, die Endpunkte dürfen zusammenfallen. Sei $D(I)$ die Vereinigung aller Strahlen, die von Punkten im Inneren in Richtung v oder $-v$ ausgehen.

Dann ist $D(I)$ ein Gebiet, dessen Rand aus Singularitäten sowie Sattelverbindungen und periodischen Strahlen parallel zu v besteht.

Beweis $D(I)$ ist zusammenhängend (wir führen die Wege über I).

Außerdem ist $D(I)$ offen: Betrachte hierzu ein $x \in D(I)$, verfolge $s_v(x)$ oder $s_{-v}(x)$ bis zu I, der Schnittpunkt sei y. Wähle ein hinreichend kleines Teilintervall J von I um y und verfolge das Band zurück zu x. Also liegt x im Inneren von $D(I)$.

$D(I)$ wird begrenzt von Sattelverbindungen und periodischen Strahlen parallel zu v: Wähle einen Randpunkt x von $D(I)$, x ist keine Singularität. Zu zeigen ist also, daß x Teil einer Sattelverbindung oder eines periodischen Strahls in Richtung v ist. Betrachte nun $s_v(x)$ und $s_{-v}(x)$. Wenn beide Strahlen eine Singularität treffen, ist x Teil einer Sattelverbindung. Es treffe nun ohne Einschränkung $s_v(x)$ keine Singularität. Dann trifft $s_v(x)$ irgendwann I im Punkt y (approximiere x durch Folge x_i im Inneren von $D(I)$, verfolge $s_v(x_i)$ bis zu I, erhalte $y_i \in I$, dies konvergiert gegen y). Wenn y im Inneren von I liegt, dann gilt $x \in s_{-v}(y)$, also $x \in D(I)$. Dies kann nicht passieren, da $D(I)$ offen ist (beachte, daß sich die topologischen Begriffe auf die euklidische Metrik im $\mathbb{R}^2$ beziehen). Also ist y ein Randpunkt von I. Verfolge $s_v(y)$, bis zum erneuten Treffen mit I, der Schnittpunkt sei z. Falls z im Inneren von I liegt, argumentiere wie eben. Also ist z ein Randpunkt. Falls $y = z$ gilt, ist $s_v(y)$ periodisch, außerdem gilt $x \in s_v(y)$, also fertig. Falls $y \neq z$ gilt, verfolge $s_v(z)$ bis zum erneuten Treffen mit I, der Schnittpunkt sei u. Wiederum kann dies kein inneren Punkt sein, muß also ein Randpunkt sein. Da I nur höchstens zwei Randpunkte besitzt, muß $u = y$ oder $u = z$ gelten; damit ist $s_v(y)$ oder $s_v(z)$ periodisch und $x \in s_v(y)$ oder $x \in s_v(z)$. Damit ist die Begrenzung gezeigt. ∎

Satz 2.4 Φ kann aufgefasst werden als Fluß über einer IAT mit Wiederkehrzeiten, die auf jedem Intervall konstant sind.

Beweis Sei zunächst I und $D(I)$ wie in Hilfssatz 2.3. Es gilt $\Phi(\mathbb{R}, D(I)) = D(I)$ und $\Phi|_{(\mathbb{R}, D(I))}$ ist ein Fluß über einer IAT auf I (wie in Satz 2.1 gesehen). Die Wiederkehrzeit ist konstant auf jedem Teilintervall.

Es reicht daher zu zeigen, daß Intervalle $I_1, \dots, I_r$ senkrecht zu v existieren, so daß die $D(I_1), \dots, D(I_r)$ disjunkt sind und als Vereinigung M' bilden, wobei M' aus M ohne Singularitäten und Sattelverbindungen in Richtung v besteht. Dann können wir die Intervalle (samt zugehöriger IAT) gedanklich nebeneinanderhängen und Φ als Fluß über diesem Gesamt-Intervall (samt zugehöriger Gesamt-IAT) betrachten.

Zunächst gilt für einen periodischen Strahl, daß er in einem Zylinder von periodischen Strahlen enthalten ist. Dieser Zylinder kann nur durch Sattelverbindungen in Richtung v begrenzt sein. Die Anzahl der Sattelverbindungen in Richtung v ist endlich (beschränkt durch die Summe aller Vielfachheiten der Singularitäten); jede Sattelverbindung begrenzt höchstens zwei Zylinder. Daher ist auch die Anzahl der Zylinder mit periodischen Strahlen endlich. Seien $D_1, \dots, D_m$ diese Bänder. Dann gilt $D_i = D(I_i)$ für geeignete Intervalle $I_1, \dots, I_m$, die senkrecht zu v liegen.

Falls $\bigcup_{i=1}^{m} D(I_i) = M'$ sind wir fertig. Andernfalls wähle ein Intervall I_{m+1} in der Differenz, wobei I_{m+1} senkrecht zu v liegt und keine Singularitäten enthält. Falls $\bigcup_{i=1}^{m+1} D(I_i) = M'$ sind wir fertig. Andernfalls wähle I_{m+2} und fahre analog fort. Jedes $D(I_i)$ ist durch Sattelverbindungen parallel zu v begrenzt; jede dieser Sattelverbindungen begrenzt höchstens zwei $D(I_i)$, daher ist die Anzahl der I_i endlich. ∎

Hiermit können wir nun die Resultate über IATen aus dem vorigen Abschnitt auf Flüsse übertragen.

Korollar 2.5 Seien $D_1, \ldots, D_s$ die Gebiete, in die M zerfällt, nachdem Singularitäten und Sattelverbindungen, die parallel zu v verlaufen, entfernt wurden.

Dann gilt: Die Anzahl der Gebiete (also s) ist beschränkt durch ein Konstante, die unabhängig von v ist (da die Anzahl der Sattelverbindungen durch die Summe der Vielfachheiten der Singularitäten beschränkt ist) und für $i = 1, \ldots, s$ gilt: D_i ist invariant unter Φ (also $\Phi(\mathbb{R}, D_i) = D_i$) und

- entweder ist D_i ein Zylinder von periodischen Strahlen parallel zu v
- oder $\Phi|_{D_i}$ ist minimal. ∎

Korollar 2.6 ω besitze keine Sattelverbindungen parallel zu v. Dann gilt:

- Entweder ist Φ minimal
- oder ω besitzt keine Singularitäten und M besteht nur aus einem einzigen Zylinder aus periodischen Strahlen (die parallel zu v verlaufen). ∎

3 Das Lemma von Masur

Stets sei in diesem Abschnitt M eine Fläche mit Translationsstruktur ω ohne hebbare Singularitäten und $v \in S^1$ eine Richtung. Der Fluß $\Phi := \Phi_v^\omega : (\mathbb{R} \times M) \to M$ bezeichne immer den Fluß auf M (sowie ω) in Richtung v.

Zunächst betrachten wir ein Geschenk aus der Theorie für dynamische Systeme. Dazu sei $I := [a, b]$ ein Intervall; T eine IAT auf I; $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$ so, daß die a_i gerade die Definitionslücken von T sind; $I_i := (a_{i-1}, a_i), i = 1, \ldots, k$. Mit $\varepsilon(T)$ bezeichnen wir die Länge des kürzesten Intervalls I_j (also $\varepsilon(T) = a_j - a_{j-1}$ für ein geeignetes j). Weiter definieren wir für $n \in \mathbb{N}$: $\varepsilon_n(T) := \varepsilon(T^n)$.

Bezeichne mit $\pi_v^\parallel(z)$ die Projektion eines Teilstrahles z auf v und mit $\pi_v^\perp(z)$ die Projektion eines Teilstrahles z auf die Richtung senkrecht zu v; $|\cdot|$ sei die Länge der jeweiligen Projektion.

Geschenk 3.1 Es gelte $n\varepsilon_n(T) \not\to 0$ für $n \to \infty$ und T sei minimal.

Dann ist T stark ergodisch. ∎

Betrachte nun für $l > 0$ die Sattelverbindungen $\{z_i\}$ der Länge höchstens l, die nicht parallel zu v verlaufen. Bezeichne $E_l(v) := \min_i\{|\pi_v^\perp(z_i)|\}$.

Satz 3.2 Es gelte $lE_l(v) \not\to 0$ für $l \to \infty$ und Φ sei minimal.
Dann ist Φ stark ergodisch.

Eine kleine Deutung: Betrachte einen Strahl, der in einer Singularität startet und in Richtung v verläuft und keine Sattelverbindung bildet. Dieser kommt an anderen Singularitäten beliebig nahe vorbei (da Φ minimal ist) und liefert daher geeignete Sattelverbindungen. Daher gilt $E_l(v) \to 0$ für $l \to \infty$. $lE_l(v) \not\to 0$ bedeutet, daß $E_l(v)$ »sehr langsam« gegen 0 geht.

Beweis Betrachte ein beliebiges geodätisches Intervall I senkrecht zu v. Nach Kapitel 2 erhalten wir aus dem minimalen Fluß in Richtung v eine minimale IAT T auf I. Wir fassen Φ jetzt als Fluß über T auf.

Sei $S := \{x \in I : s_v(x) \text{ trifft Singularität}\}$. Da T minimal ist, liegt S dicht in I. Ohne Einschränkung liegen die Endpunkte von I in S (mache andernfalls I kleiner).

Sei $S_1 := S_2 \cup S_3 \cup S_4$, wobei
$S_2 := \{x \in S : s_v(x) \text{ trifft Singularität vor der Rückkehr zu } I\}$,
$S_3 := \{x \in S : s_v(x) \text{ kehrt zuerst zu Endpunkt von } I \text{ zurück}\}$,
$S_4 := \{x \in S : x \text{ ist Endpunkt von } I\}$.

Klar: $|S_3|, |S_4| < \infty$. Ausgehend von einer Singularität treffen die Strahlen in Richtung $-v$ pro Vielfachheit ein $x \in S_2$. Also ist $|S_2| < \infty$ und damit $|S_1| < \infty$.

$I \setminus S_1$ besteht aus endlich vielen Intervallen, auf denen T als Verschiebung arbeitet (falls ein Band »geteilt« wird, muß eine Singularität oder ein Intervallende von I erreicht werden; dies haben wir ausgeschlossen).

Wir dürfen annehmen, daß T auf S_1 nicht definiert ist (dies ist klar für S_2; per definitionem nun auch für S_3 und S_4).

Es gibt geeignete Konstanten t_1, t_2 so, daß für $x \in I$ gilt:

$$s_v(x) \text{ trifft } \begin{cases} \text{Singularität vor Zeit } t_1 & \text{falls } x \in S_1 \\ I \text{ vor Zeit } t_2 & \text{falls } x \notin S_1 \end{cases}.$$

Seien nun $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2 \in I$ so, daß $T^n(x_1) = T^n(x_2) = \perp$ und $|x_1 - x_2| = \varepsilon_n(T)$ (diese existieren nach Definition von $\varepsilon_n(T)$). $s_v(x_1), s_v(x_2)$ treffen je eine Singularität vor Zeit $(n-1)t_2+t_1$. Daher existiert eine Sattelverbindung z mit $|\pi_v^{\|}(z)| < (n-1)t_2+t_1$ und $|\pi_v^{\perp}(z)| \leq \varepsilon_n(T)$ hat.

Da $\varepsilon_n(T) \leq \varepsilon(T)$ beschränkt ist und $nt_2 \to \infty, n \to \infty$, gilt, ist die Länge der Sattelverbindung höchstens $(n-1)t_2 + t_1 + \varepsilon_n(T) = nt_2 + t_1 - t_2 + \varepsilon_n(T) \leq 2nt_2$ für n groß. Also ist $E_{2nt_2}(v) \leq \varepsilon_n(T)$ für n groß.

Wegen $2nt_2 E_{2nt_2}(v) \not\to 0$ gilt $nE_{2nt_2}(v) \not\to 0$, also $n\varepsilon_n(T) \not\to 0$ für $n \to \infty$.

Also ist nach Geschenk 3.1 T stark ergodisch. Da Φ auf M auch ein Fluß über T ist, ist auch Φ stark ergodisch. ∎

Satz 3.3 (Lemma von Masur)
ω enthalte Singularitäten und es gelte $m(g^t\omega) \not\to 0$ für $t \to \infty$, wobei

$$g^t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Dann ist der Fluß in die vertikale Richtung (also Φ_v^ω für $v = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$) stark ergodisch.

Beweis Es sei nun immer $v = \binom{0}{1}$. Falls es eine Sattelverbindung in Richtung v gibt, gilt $m(g^t\omega) \to 0$, dies kann also nicht vorkommen. Nach Korollar 2.6 ist Φ also minimal.

Es gelte nun vorübergehend $m(g^t\omega) \to 0, t \to \infty$, also
$\forall \delta > 0 \exists t_0 > 0 \forall t \geq t_0 : m(g^t\omega) < \delta$. Dies ist äquivalent zu:
$\forall \delta > 0 \exists l_0 > 0 \forall l \geq l_0 \exists$Sattelverbindung z mit $|\pi_v^{||}(z)| \leq \delta l$ und $|\pi_v^{\perp}(z)| \leq \frac{\delta}{l}$

- $\Rightarrow$: Wenn es eine Sattelverbindung z in Richtung v gibt, ist nichts zu zeigen, da $|\pi_v^{\perp}(z)| = 0$; wähle l_0 groß genug. Es gebe also nun keine Sattelverbindung in Richtung v.

  Sei $z(t) = \begin{pmatrix} z(t)_1 \\ z(t)_2 \end{pmatrix}$ die kürzeste Sattelverbindung in $g^t\omega$ (also $|z(t)| = m(g^t\omega)$). Beachte, daß die Komponenten gerade die Projektionen sind (v ist die vertikale Richtung). Setze $u(t) := g^{-t}z(t)$. Also $z_1(t) = e^{t/2}u(t)_1$ und $z_2(t) = e^{-t/2}u(t)_2$.

  Dann gilt $(m(g^t\omega))^2 = |z(t)|^2 = e^t u(t)_1^2 + e^{-t}u(t)_2^2 \to 0, t \to \infty$. Also gilt $e^t u(t)_1^2 \to 0, e^{-t}u(t)_2^2 \to 0$. Daher existiert zu $\delta > 0$ ein t_0 so, daß für $t \geq t_0$ gilt: $e^t u(t)_1^2 < \delta^2$ und $e^{-t}u(t)_2^2 < \delta^2$.

  Sei $l_0 := e^{t_0/2}$. Für $l \geq l_0$ setze $t := 2\ln l \geq 2 \ln l_0 = t_0$.
  Dann gilt: $u(t)_1^2 < \left(\frac{\delta}{e^{t/2}}\right)^2 = \left(\frac{\delta}{l}\right)^2$ und $u(t)_2^2 < (\delta e^{t/2})^2 = (\delta l)^2$.

- $\Leftarrow$: Sei $\delta > 0$. Setze $t_0 := 2 \ln l_0$. Für $t \geq t_0$ setze $l := e^{t/2} \geq e^{t_0/2} = l_0$. Wähle die dazugehörige Sattelverbindung z mit $|z|^2 = |\pi_v^{\perp}(z)|^2 + |\pi_v^{||}(z)|^2$.

  Dann ist $(m(g^t\omega))^2 = |g^t z|^2 \leq \left(e^{t/2}\right)^2 |\pi_v^{\perp}(z)|^2 + \left(e^{-t/2}\right)^2 |\pi_v^{||}(z)|^2$
  $\leq \left(e^{t/2}\right)^2 \frac{\delta^2}{l^2} + \left(e^{-t/2}\right)^2 \delta^2 l^2 = l^2 \frac{\delta^2}{l^2} + \frac{1}{l^2}\delta^2 l^2 \leq 2\delta^2$.

Die ist äquivalent zu:
$\forall \delta > 0 \exists k_0 > 0 \forall k \geq k_0 \exists$Sattelverbindung z mit $|\pi_v^{||}(z)| \leq k$ und $|\pi_v^{\perp}(z)| \leq \frac{\delta^2}{k}$

- $\Rightarrow$: Sei $\delta > 0$. Setze $k_0 := \delta l_0$. Für $k \geq k_0$ setze $l := \frac{k}{\delta} \geq \frac{k_0}{\delta} = l_0$.
  Also existiert z mit $|\pi_v^{||}(z)| \leq \delta l = \delta \frac{k}{\delta} = k$ und $|\pi_v^{\perp}(z)| \leq \frac{\delta}{l} = \frac{\delta}{\frac{k}{\delta}} = \frac{\delta^2}{k}$.

- $\Leftarrow$: Sei $\delta > 0$. Setze $l_0 := \frac{k_0}{\delta}$. Für $l \geq l_0$ setze $k := l\delta \geq l_0\delta = k_0$.
  Also existiert z mit $|\pi_v^{||}(z)| \leq k = \delta l$ und $|\pi_v^{\perp}(z)| \leq \frac{\delta^2}{k} = \frac{\delta^2}{\delta l} = \frac{\delta}{l}$.

Es gelte nun $lE_l(v) \to 0, l \to \infty$, die zugehörigen Sattelverbindung seien z_l. Dann existiert zu $\delta^2 > 0$ ein l_0 so, daß für $l \geq l_0$ gilt $lE_l(v) < \delta^2$. Also $|\pi_v^{\perp}(z_l)| = E_l(v) < \frac{\delta^2}{l}$ und $|\pi_v^{||}(z_l)| \leq l$. Damit sind die Voraussetzungen der zweiten Äquivalenz erfüllt, also gilt $m(g^t\omega) \to 0, t \to \infty$.

Zusammenfassend: aus $m(g^t\omega) \not\to 0, t \to \infty$ folgt $lE_l(v) \not\to 0, l \to \infty$.

Damit sind also die Voraussetzungen für Satz 3.2 erfüllt und Φ ist stark ergodisch.$\blacksquare$