Die Veech-Alternative für Billardtische

Caroline Obrecht

1 Von Billardtischen zu Riemannschen Flächen

1.1 Die Translationsflächen (X, ω) und $(X, A\omega)$

Erinnerung:
Jeder Sattelverbindung einer Translationsfläche (X, ω) können auf eindeutige Weise zwei Vektoren im $\mathbb{R}^2$ zugeordnet werden, die sogenannten Abwicklungen von L. Die Folge aller Abwicklungen aller Sattelverbindungen von (X, ω) bezeichnet man mit $SC(\omega)$. $SC(\omega)$ besitzt keine Limespunkte und die Richtungen der Vektoren aus $SC(\omega)$ liegen dicht auf dem Einheitskreis.

Erinnerung / Definition 1.1:
Sei (X, ω) eine Translationsfläche mit Translationsstruktur $\omega = \left\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\right\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ und sei $A \in GL_2(\mathbb{R})$.
$\Rightarrow A\omega := \left\{(U_\alpha, A \circ \phi_\alpha)\right\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ist ebenfalls eine Translationsstruktur auf X.
(X, ω) und $(X, A\omega)$ besitzen dieselben singulären Punkte mit denselben Vielfachheiten und auch dieselben Sattelverbindungen. Insbesondere:

$$v \in SC(\omega) \Leftrightarrow Av \in SC(A\omega), \text{ also } SC(A\omega) = A(SC(\omega)).$$

Die Länge der kürzesten Sattelverbindung von (X, ω) bezeichnen wir mit $m(\omega)$.

Proposition 1.2:
Die Funktion $d : GL_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $d(A) = m(A\omega)$ ist stetig. Ihre Einschränkung auf die Untergruppe $SL_2(\mathbb{R})$ ist beschränkt.

Erinnerung:
Sei (X, ω) Translationsfläche. Eine Abbildung $f : X \to X$ heißt affiner Diffeomorphismus von ω :$\Longleftrightarrow$

- f ist Homöomorphismus
- f bildet singuläre Punkte auf singuläre Punkte ab
- f stellt eine affine Abbildung in den lokalen Koordinaten von ω dar

Die zu der affinen Abbildung gehörige Matrix $A \in GL_2(\mathbb{R})$ wird bezeichnet als die Ableitung von f. (Kurz: $A =: der(f)$).
$\Gamma(\omega) := \{A \in GL_2(\mathbb{R}) | \, A = der(f), f$ orientierungserhaltender Diffeomorphismus$\}$ heißt Veech-Gruppe von (X, ω).

Definition 1.3:
Seien (X, ω) und (Y, ν) Translationsflächen. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt Isomorphismus von ω und ν :$\Longleftrightarrow$

- f ist Homöomorphismus
- f bildet die singulären Punkte von ω auf die singulären Punkte von ν ab

- f stellt eine Translation in den lokalen Koordinaten dar

Korollar 1.4:
f ist orientierungserhaltender affiner Diffeomorphismus von $\omega \Leftrightarrow f$ ist bezüglich der Translationsstrukturen ω und $A^{-1}\omega$ ein Isomorphismus, wobei A die Ableitung von f bezeichne.
$\Rightarrow \Gamma(\omega) = \left\{A \in SL_2(\mathbb{R}) | \omega \text{ isomorph zu } A^{-1}\omega\right\}$ ($A \in SL_2(\mathbb{R})$ folgt aus der Isomorphie von ω und $A\omega$).
Dies definiert uns die Äquivalenzrelation

$$(X, \omega) \sim (X, A\omega) \Leftrightarrow A \in \Gamma(\omega).$$

Bezüglich der Äquivalenzrelation ~definieren wir $D := \{(X, A\omega) | \, A \in SL_2(\mathbb{R})\} /_{\sim}$

1.2 Von Billardtischen zu Riemannschen Flächen

Billardtisch in Form eines rationalen Polygons

↓

....

↓

....

↓

Riemannsche Fläche

Proposition 1.3:
Die Veech-Gruppe $\Gamma(\omega)$ einer Translationsfläche (X, ω) ist eine Fuchssche Gruppe.

2 Die Veech-Alternative

Im Folgenden sei (X, ω) eine Translationsfläche, die mindestens eine Singularität besitze.

Definition 2.1:
Eine Translationsfläche (X,ω) heißt elementar, wenn der (geodätische) Fluss auf X in eine beliebige Richtung entweder eindeutig ergodisch ist oder nur periodische Komponenten besitzt (das heißt, die Translationsfläche zerfällt in disjunkte Gebiete, und auf jedem Gebiet ist der Fluss periodisch).

Satz 2.2: Die Veech-Alternative
Sei (X, ω) eine Translationsfläche. Ihre Veech-Gruppe $\Gamma(\omega)$ sei ein Gitter, das heißt, der Fundamentalbereich von $\Gamma(\omega)$ habe endliches Volumen. Dann ist (X, ω) eine elementare Translationsfläche.

Für den Beweis betrachten wir zunächst nur die vertikale Richtung.

Beweisidee:
i) Der Fluss in vertikale Richtung zerfällt in periodische Komponenten $\Leftrightarrow$ Auf (X, ω) existiert eine Sattelverbindung in vertikaler Richtung.

ii) Wenn der Fluss nicht in periodische Komponenten zerfällt, dann ist er eindeutig ergodisch.

Betrachte $g^t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$.

Dann:
(X, ω) besitzt eine Sattelverbindung in vertikaler Richtung $\Rightarrow m(g^t\omega) \to 0$ für $t \to \infty$.

$m(g^t\omega) \nrightarrow 0$ für $t \to \infty \Rightarrow$ es gibt keine Sattelverbindung in vertikaler Richtung $\Rightarrow$ Zu zeigen: Fluss ist eindeutig ergodisch.

Der Beweis der Veech-Alternative gestaltet sich also folgendermaßen:

1) $m(g^t\omega) \to 0$ für $t \to \infty \Rightarrow$ der Fluss in vertikaler Richtung zerfällt in periodische Komponenten (entspricht Richtung „$\Leftarrow$“ in i))
2) $m(g^t\omega) \nrightarrow 0$ für $t \to \infty \Rightarrow$ der Fluss in vertikaler Richtung ist eindeutig ergodisch.

3 Geometrische Interpretation

Proposition 3.1:
Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} SL_2(\mathbb{R}) \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & \mathbb{H} \arrow[d, "\phi"] \\ D \arrow[r, "q'"'] & \mathbb{H}/\Gamma(\omega) \end{tikzcd}$$

kommutiert, das heißt es gilt $q' \circ p = \phi \circ q$.
ϕ ist die kanonische Projektion von $\mathbb{H}$ auf $\mathbb{H}/\Gamma(\omega)$, q und p sind folgendermaßen definiert:

$$q : SL_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{H},\ A \longmapsto A^{-1}(i)$$

$$p : SL_2(\mathbb{R}) \to D,\ A \longmapsto (X, A\omega)/\sim$$

Außerdem gilt:

$$q(A) = q(A') \Leftrightarrow A' = BA \text{ mit einem } B \in SO(2)$$

Proposition 3.2:
Die Abbildung $d(A) = m(A\omega)$, $A \in SL_2(\mathbb{R})$ steigt ab zu einer stetigen Abbildung $\overline{m} : \mathbb{H}/\Gamma(\omega) \to \mathbb{R}$ mit $d(A) = m(A\omega) = \overline{m} \circ \phi \circ q(A)$.

Betrachte nun die Matrix g^t. Sei $h(t) := q(g^t) = g^{-t}(i)$ der von g^t parametrisierte Weg auf $\mathbb{H}$.

Durch Anwendung von ϕ auf $h(t)$ erhält man den Weg $R(t) := \phi(h(t)) = h(t) \cdot \Gamma(\omega)$ auf der Riemannschen Fläche $\mathbb{H}/\Gamma(\omega)$.

Lemma 3.3:
Sei (X, ω) eine Translationsstruktur, sodass $m(g^t\omega) \to 0$ für $t \to \infty$. Dann läuft $R(t) = h(t) \cdot \Gamma(\omega)$ in eine Spitze von $\mathbb{H}/\Gamma(\omega)$.

Korollar 3.4:
$R(t)$ laufe in eine Spitze von $\mathbb{H}/\Gamma(\omega)$. Dann gilt $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma(\omega)$ für ein $\alpha \neq 0$.

4 Beweis der Veech-Alternative

4.1 Der periodische Fall: $m(g^t\omega) \to 0$ für $t \to \infty$

Lemma 4.1:
Sei $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma(\omega), \alpha \neq 0$ und die Translationsfläche (X, ω) habe singuläre Punkte. Dann besitzt der Fluss auf (X, ω) in die vertikale Richtung nur periodische Komponenten.
Zudem gilt für jeden Zylinder von periodischen Trajektorien, dass das Verhältnis von Länge und Breite des Zylinders mit α kommensurabel ist.

Erinnerung: X zerfällt bezüglich des Flusses in vertikaler Richtung in disjunkte Komponenten: Es gilt $X = \overline{D(I_1)} \cup .... \cup \overline{D(I_N)}$. Die $D(I_j)$ sind dabei offen, invariant unter dem Fluss und es gilt:
Entweder

- $D(I_j)$ ist Zylinder von periodischen Trajektorien in vertikaler Richtung

oder

- der Fluss in vertikaler Richtung ist minimal auf $D(I_j)$, insbesondere: jede Trajektorie in vertikaler Richtung liegt dicht in $D(I_j)$.

Außerdem: Der Rand von $D(I_j)$ besteht aus Sattelverbindungen (und eventuell Singularitäten).

4.2 Der eindeutig ergodische Fall: $m(g^t\omega) \nrightarrow 0$ für $t \to \infty$

Diesen Teil übernimmt Gregor.

4.3 Übergang auf beliebige Richtungen des Flusses und auf Translationsflächen ohne Sattelverbindungen

Proposition 4.2:
Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass unsere Translationsfläche singuläre Punkte besitzt. Zudem ist der Fall eines Flusses in beliebiger Richtung zum Fall des Flusses in vertikaler Richtung äquivalent.