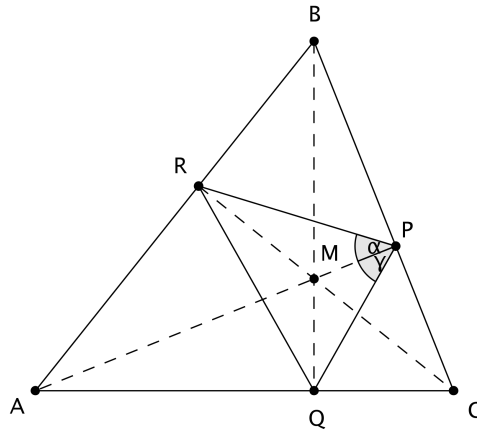


Billard auf polygonförmigen Tischen

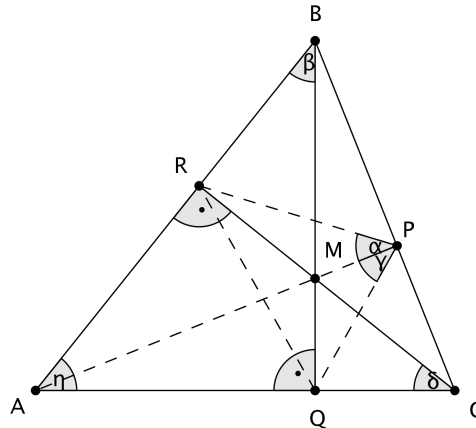
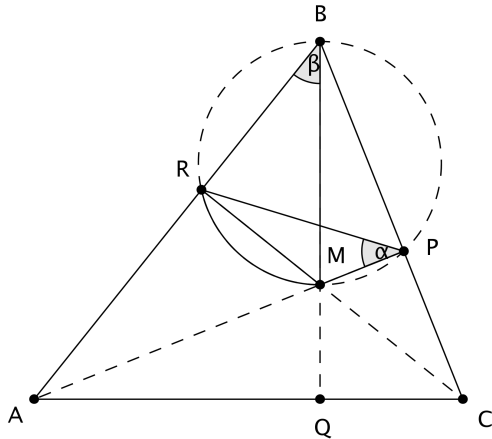
Myriam Freidinger

1 Der Fagnano Billardstrahl im Dreieck



Lemma 1. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck und P, Q und R die Basispunkte der Höhen von A, B und C , dann beschreibt das Dreieck PQR eine 3-periodische Billardbahn.

Beweis. Sei M der Schnittpunkt der Höhen. Das Viereck $BPMR$ hat bei R und P einen rechten Winkel, besitzt also nach der Umkehrung des Satz des Thales einen Umkreis.



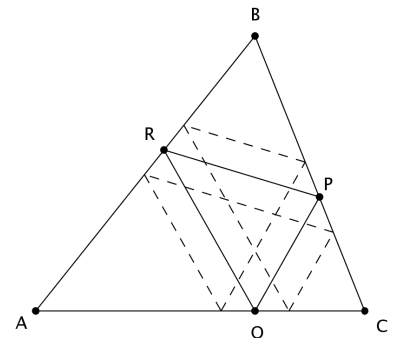
Alle Umfangswinkel über einem Kreisbogen sind gleich, also gilt $\alpha = \beta$.

Analoge Überlegungen mit dem Viereck $PCQM$ liefern $\gamma = \delta$.

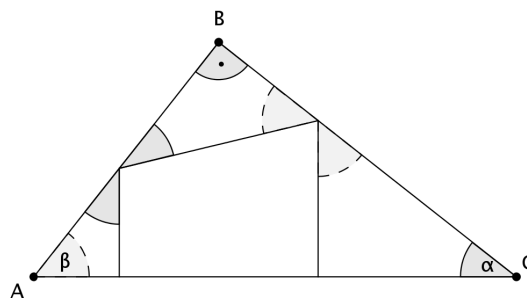
β und δ ergänzen jeweils den Winkel η zu 90° , also gilt $\beta = \delta$. □

Bemerkung 1. Jede n -periodische Bahn gehört zu einer Familie von parallelen periodischen Bahnen mit

- gleicher Periode und Länge, falls n gerade ist.
- doppelter Periode und Länge, falls n ungerade ist.



Bemerkung 2. In jedem rechtwinkligen Dreieck gibt es eine 6-periodische Bahn.



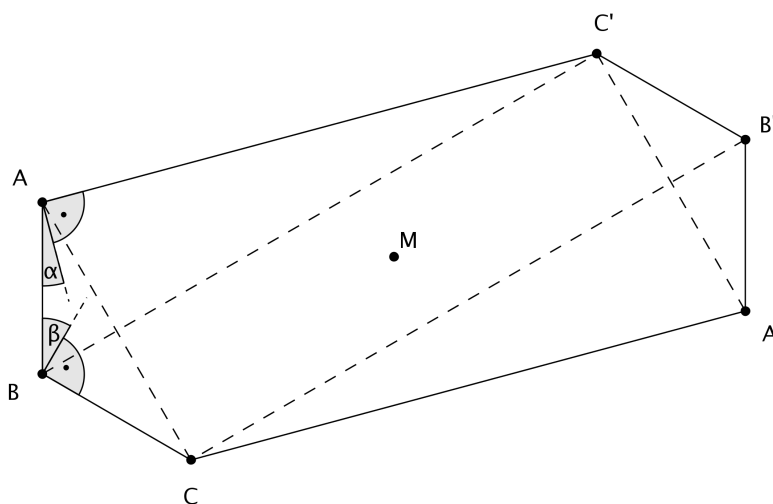
2 Der Billardtisch von Galperin

Definition 1. Ein Polygon heißt rational, falls alle Innenwinkel \mathbb{Q} -Vielfache von π sind.

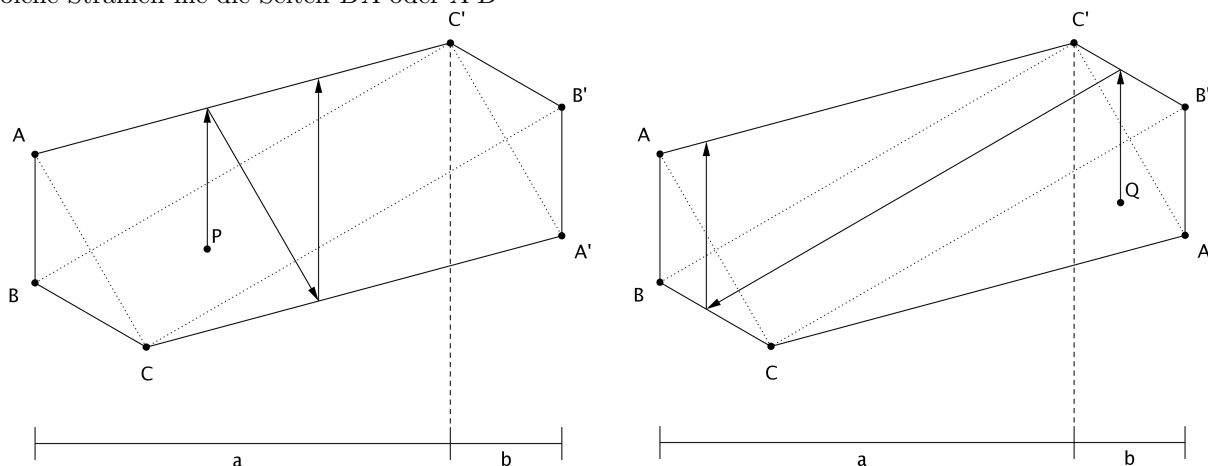
Satz 2. Für jedes $n \geq 4$ gibt es ein rationales Polygon P mit einer Billardbahn, die weder periodisch noch dicht in P ist.

Beweis. Betrachte den folgenden zentralsymmetrischen Billardtisch mit:

- $\alpha = \frac{\pi}{12}$ und $\beta = \frac{\pi}{6}$
 - Die Orthogonale bei A auf die Seite AC' ist die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle BAC$.
 - Die Orthogonale bei B auf die Seite BC ist die Winkelhalbierende der Winkels $\sphericalangle ABC'$
- $\Rightarrow \sphericalangle B'C'A = \frac{3\pi}{4}$



Parallele Strahlen zu BA sind nach zwei Reflektionen wieder parallel zu BA . Insbesondere treffen solche Strahlen nie die Seiten BA oder $A'B'$



Betrachte die Projektion $p(x_i)$ der Reflektionspunkte x_i , $i \in \mathbb{Z}$ an den Seiten AC' und $C'B'$ einer Billardbahn mit vertikaler Richtung auf die x-Achse. Es gilt:

- $p(x_{i+1}) = p(x_i) + b$, falls $0 < p(x_i) < a$ und
- $p(x_{i+1}) = p(x_i) - a$, falls $a < p(x_i) < a + b$.

Also $p(x_{i+1}) = p(x_i) + b \pmod{a+b}$. Da $\frac{b}{a+b} \notin \mathbb{Q}$ (nachrechnen!), ist die Bahn nicht periodisch.

Die Seiten BA und $A'B'$ werden nicht getroffen und können durch Polygonzüge ersetzt werden, ohne dass sich die „vertikale“ Billardbahn ändert. Der neue Bereich des Polygons wird von der Bahn nie erreicht. Zum Beispiel kann ein Parallelogramm mit spitzem Winkel $\frac{\pi}{4}$ durch Verlängerung der Seiten AC' , BC , CA' und $C'B'$ erzeugt werden. \square

3 Rationale Polygone in der Ebene

Eine Billardbahn in einem rationalen Polygon P kann nur endlich viele Richtungen annehmen.

Definition 2. Sei P ein rationales Polygon. Betrachte zu jeder Kante x von P die Ursprungsgerade, die parallel zu x ist. $G(P)$ ist definiert als die Gruppe der linearen Isometrien, die von den Spiegelungen S_x an diesen Geraden erzeugt wird.

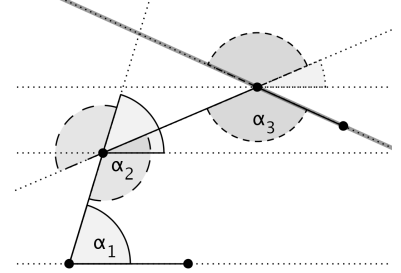
Satz 3. $G(P)$ ist eine Diedergruppe.

Beweis. S_α bezeichne die Spiegelung an der Ursprungsgerade mit Winkel α zur Horizontalen, R_β die Rotation um den Ursprung um 2β gegen den Uhrzeigersinn.

Die Innenwinkel von P seien $\alpha_i = \frac{\pi m_i}{n_i}$ mit $\text{ggT}(m_i, n_i) = 1$ für $i = 1, \dots, k$, o.B.d.A. sei eine der Seiten von P horizontal.
 $\Rightarrow G(P) = \langle S_{\alpha_1}, S_{\alpha_1+\alpha_2}, \dots, S_{\alpha_1+\dots+\alpha_k} \rangle$

Erinnerung:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad S_\alpha \cdot S_\beta &= R_{\alpha-\beta} & \text{(ii)} \quad S_\alpha \cdot R_\beta &= S_{\alpha-\beta} \\ \text{(iii)} \quad R_\alpha \cdot S_\beta &= S_{\alpha+\beta} & \text{(iv)} \quad R_\alpha \cdot R_\beta &= R_{\alpha+\beta} \end{aligned}$$



- (i) $\Rightarrow R_{\alpha_i} \in G(P) \quad \text{ggT}(m_i, n_i)=1 \Rightarrow R_{\frac{\pi}{n_i}} \in G(P)$

- Sei $\tilde{n} = p_i n_i = p_j n_j$ mit $\text{ggT}(p_i, p_j) = 1$, also $1 = r p_i + s p_j$ mit $r, s \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow (R_{\pi/n_i})^r \cdot (R_{\pi/n_j})^s = R_{\pi/\tilde{n}} \in G(P)$

$$\Rightarrow R_{\pi/N} \in G(P) \text{ für } N = \text{kgV}(n_1, \dots, n_k)$$

- (ii) $\Rightarrow S_{\alpha_1+\dots+\alpha_k} \cdot R_{\alpha_1} \cdot \dots \cdot R_{\alpha_{k-1}} = S_{\alpha_k} \in G(P)$

- $S_{m_i \pi/n_i} = S_{x\pi/N}$, $S_{x\pi/N} \cdot R_{(x-1)\pi/N} \stackrel{(ii)}{=} S_{\pi/N} \in G(P) \stackrel{(iii)}{\Rightarrow} S_{k\pi/N} \in G(P)$

Dass $G(P)$ von den $S_{k\pi/N} \in G(P)$ erzeugt wird, folgt wiederum aus (i) und (iii).

Damit ist $G(P)$ die Diedergruppe D_N d.h. die Symmetriegruppe des regulären N-Ecks, bestehend aus N Spiegelungen und N Drehungen. \square

Bemerkung 3. Wird ein Strahl mit Richtung θ an der Kante x reflektiert, so hat er anschließend die Richtung $S_x(\theta)$. Die Gruppe $G(P)$ operiert folglich auf den Richtungen eines jeden Billardstrahls in P .

4 ZK-Konstruktion

Idee: Spiegle das Polygon anstatt der Richtung des Billardstrahls.

Sei P wieder ein rationales Polygon mit Winkeln $\frac{m_i}{n_i}\pi$, $\text{ggT}(m_i, n_i) = 1$ und $N := \text{kgV}(n_i)$. Betrachte eine generische Richtung $\theta \neq \frac{k\pi}{N}$, d.h. eine Richtung mit maximaler Bahnlänge $2N$ unter der Operation von $G(P)$.

Erinnerung: Phasenraum $X := P \times S^1 / \sim$ Billardfluss $\Phi : (\mathbb{R}, +) \times X \rightarrow X$

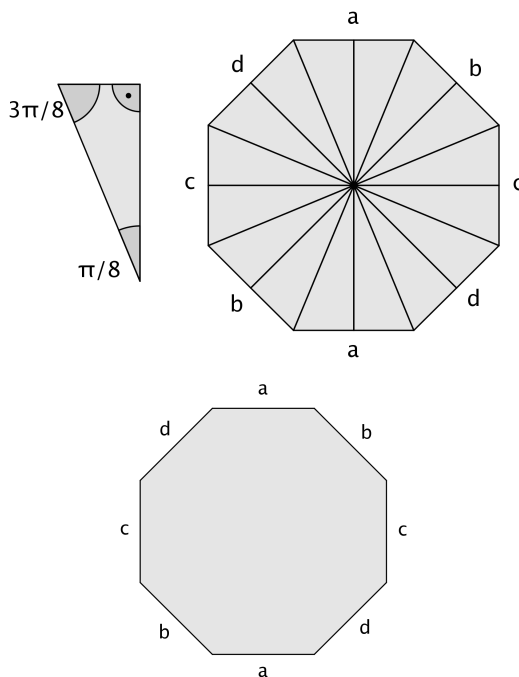
Definition 3.

$$M_\theta := \{(x, v) \in X \mid \exists g \in G(P) : g(v) = e^i \theta\}$$

→ M_θ ist invariant unter Φ

→ M_θ kann durch Verkleben von $2N$ „Kopien“ von P erzeugt werden.

Beispiel 1. Betrachte das rechtwinklige Dreieck mit Winkel $\frac{\pi}{8}$:



Zum Beispiel kann θ als $\pi/7$ gewählt werden. $N = \text{kgV}(8, 2) = 8$.

M_θ ist orientierbar, also gilt nach Vortrag 2 $\chi = 2 - 2g$, wobei χ die Euler-Charakteristik und g das Geschlecht von M_θ bezeichnet.

χ ist unabhängig von der konkreten Zellstruktur, also können die inneren Kanten und der innere Punkt für die Berechnung entfernt werden.

$$\chi = E - K + F = 1 - 4 + 1 = -2 \quad \Rightarrow \quad g = 2$$

Die Translationsfläche M_θ hat einen singulären Punkt. Dort werden 8 Segmente mit Winkel $\frac{3}{4}\pi$ verklebt, die Singularität hat damit Vielfachheit 3.

4.1 Allgemeine Konstruktion:

Seien weiter $\theta_1, \dots, \theta_{2N-1}$ die $2N - 1$ Richtungen auf die $\theta \neq \frac{k\pi}{N}$ unter $G(P)$ abgebildet wird.

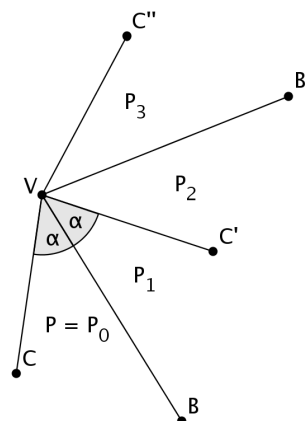
- $P_0 := P$
- $\theta_i = g(\theta)$ mit $g \in G(P) \rightarrow P_i := g(P)$
Falls g eine Drehung ist hat P_i damit die gleiche, andernfalls die entgegengesetzte Orientierung wie P .
- Verklebung:
Ergibt die Reflektion von θ_i an einer Seite von P den Winkel θ_j , so wird diese Seite von P_i mit der „gleichen“ Seite von P_j verklebt.

⇒ Translationsfläche M_θ .

Bemerkung 4. $M := M_\theta$ ist für $\theta \neq \frac{k\pi}{N}$ unabhängig von θ .

4.2 Verhalten von M an den Ecken der Polygone:

- Sei V eine Ecke von P mit Innenwinkel $m\pi/n$, G' sei die Gruppe, die von den Spiegelungen an den zu V inzidenten Kanten erzeugt wird.
- An V werden $|G'| = 2n$ Kopien von P verklebt, was einen Winkel von $2\pi m$ ergibt.
- Da M aus $2N$ Polygonen verklebt wird, entstehen in M insgesamt N/n solche Singularitäten der Vielfachheit m aus V .



Satz 4. M_θ ist für $\theta \neq \frac{k\pi}{N}$ homöomorph zu einer topologischen Fläche mit glatter Struktur (d.h. mit C^∞ Kartenwechseln).

Beweis. Wähle die Karten für das innere der Polygone und die Seiten der Polygone wie durch die Konstruktion impliziert (mit Translationen als Kartenwechsel).

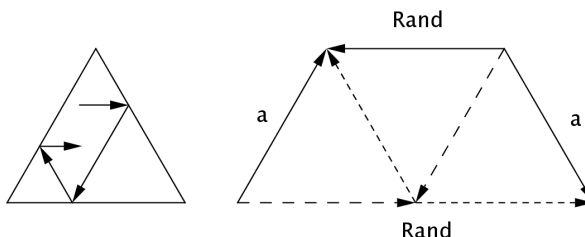
An einer Ecke A , die aus einer Ecke von P mit Winkel $\pi \frac{m}{n}$ entstanden ist, kann eine Umgebung U_A von A als disjunkte Vereinigung von $2n$ Sektoren $R_k = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \epsilon, \frac{(k-1)m}{n}\pi \leq \arg z \leq \frac{km}{n}\pi\}$ gesehen werden. Definiere die Karte um A als

$$\Phi_{U_A} : U_A \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sqrt[m]{z}$$

Die Kartenwechsel mit Φ_{U_A} sind glatt, da A von keiner anderen Karte überdeckt wird. □

Bemerkung 5. Für $\theta = k\pi/N$ wird M_θ zu einer, möglicherweise nicht orientierbaren, topologischen Fläche mit Rand.

Beispielsweise wird aus einem gleichseitigen Dreieck mit Richtung $\theta = 0$ ein Möbiusband.



Satz 5. Sei P ein k -seitiges rationales Polygon wie oben definiert, dann gilt für das Geschlecht der zugehörigen Translationsfläche M :

$$g = 1 + \frac{N}{2} \left(k - 2 - \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} \right)$$

Beweis. Zu jeder Ecke V von P mit Winkel $\frac{m_i}{n_i}\pi$, gehören N/n_i Ecken in M . Die Gesamtanzahl der Ecken ist somit $N \sum_{i=1}^k 1/n_i$. Außerdem enthält M Nk Kanten und $2N$ Facetten.

$$\Rightarrow \chi(M) = N \sum_{i=1}^k 1/n_i - Nk + 2N$$

Da M orientierbar ist, gilt $\chi(M) = 2 - 2g$. □

Lemma 6. Für ein Polygon mit Winkeln π/n_i gibt es für die n_i bis auf Permutation nur folgende Möglichkeiten:

$$(3, 3, 3) \quad (2, 4, 4) \quad (2, 3, 6) \quad (2, 2, 2, 2)$$

Die zugehörige Translationsfläche M ist in jedem Fall ein Torus.

Beweis. $\sum_{i=1}^k \pi/n_i = (k-2)\pi \Rightarrow$ es gibt nur die vier oben genannten Möglichkeiten. Aus Satz 5 folgt $g = 1 + N/2(k-2 - (k-2)) = 1$. □

Bemerkung 6. Alle obigen Polygone kacheln die Ebene.