Riemannsche Flächen und der Teichmüllerraum - Referatthemen

1) **Riemannsche Flächen und holomorphe Abbildungen** *(Forster, S.1-9)*
Die Definition von Riemannscher Fläche soll gegeben werden und anhand einiger Beispiele veranschaulicht werden ($\mathbb{C}$, Gebiete in $\mathbb{C}$, $\hat{\mathbb{C}}$, Torus). Holomorphe Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen sollen definiert werden und der Begriff der Isomorphie von Riemannschen Flächen sollte fallen, sowie kompakte Riemannsche Fläche. Die lokale Gestalt von holomorphen Abbildungen und was Vielfachheit ist, ist zu besprechen. Als Puffer können auch noch meromorphe Funktionen definiert werden.

2) **Die Fundamentalgruppe** *(Forster, S.11-18)*
Die Begriffe Homotopie, Kurve, Punktkurve usw. müssen zunächst geklärt werden, um dann die Fundamentalgruppe zu definieren. Wenn die Fundamentalgruppe trivial ist, nennt man den entsprechenden topologischen Raum einfach zusamenhängend. Dieser Begriff ist wichtig für den weiteren Verlauf des Seminars und sollte deshalb nicht fehlen. Dann sollte die Abhängigkeit vom Basispunkt diskutiert werden und wie eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen einen Homomorphismus der Fundamentalgruppen induziert. Beispiele sollten auch nicht fehlen.

3) **Klassifikation von orientierbaren kompakten Flächen** *(Fulton, S.233-243)*
Es ist zu zeigen, dass jede orientierbare kompakte Fläche homöomorph zu einer Sphäre mit g Henkeln ist (g heißt dann das „Geschlecht“ dieser Fläche). Dazu muss man von einer endlichen Triangulierung der Fläche X ausgehen (so etwas existiert immer, wenn X kompakt ist). Was eine Triangulierung ist, muss also vorher kurz erläutert werden, das selbe gilt für den Begriff der Orientierbarkeit, der zumindest intuitiv klar gemacht werden sollte. Auf die Klassifikation der nicht orientierbaren Flächen kann verzichtet werden (auch wenn das nicht schwieriger ist als der orientierbare Fall), da Riemannsche Flächen, um die es uns ja geht, immer orientierbar sind. Am Ende des Beweises sieht man zwar schon die Fundamentalgruppe einer Fläche vom Geschlecht g, man muss nur noch zeigen, dass sie es tatsächlich ist. Der Satz von Van Kampen, der dafür nötig ist, kann ohne Beweis verwendet werden.

4) **Überlagerungen I** *(Forster, S.18-22)*
Hier soll zunächst definiert werden, was eine Überlagerung ist, dann zwischen unverzweigten und verzweigten Überlagerungen unterschieden werden. Dann soll das Liften von Abbildungen besprochen werden, sowie die Eindeutigkeit der Liftung (wenn ein Punkt vorgegeben ist). Sehr wichtig ist in diesem Zusammenhang der Monodromiesatz (Satz 4.10).

5) **Überlagerungen II** *(Forster, S.22-31; Imayoshi/Taniguchi, S.25f)*
Unbegrenzte unverzweigte Überlagerungen sollen eingeführt werden, und es soll gezeigt werden, dass solche Überlagerungen die Kurvenliftungseigenschaft haben. An Beispielen sollen dann die verschiedenen Arten von Überlagerungen veranschaulicht werden (Überlagerungen von Torus und $\mathbb{C}^*$). Satz 4.17, sowie der Teil über eigentliche Abbildungen kann

weggelassen werden. Anschließend ist die universelle Überlagerung zu definieren, sowie deren Eindeutigkeit und Existenz zu beweisen. Letzteres soll konstruktiv geschehen, d.h. durch eine Anleitung, wie die universelle Überlagerung konstruiert werden kann. Zum Schluss sollte noch der Uniformisierungssatz formuliert werden, allerdings ohne Beweis.

6) **Überlagerungen III** *(Forster, S.31-34; Imayoshi/Taniguchi, Thm. 2.4 + Lemma 2.6)*
Thema dieses Vortrags sind die Decktransformationen, normale Überlagerungen und die Decktransformationsgruppe. Ein wichtiges Ergebnis ist der Zusammenhang zwischen Decktransformationsgruppe und Fundamentalgruppe. Des Weiteren lässt sich auch zu jeder Untergruppe der Fundamentalgruppe eine Überlagerung angeben. Dann sollte Thm. 2.4 aus Imayoshi/Taniguchi besprochen werden und dass die Decktransformationsgruppe eigentlich diskontinuierlich, transitiv auf den Fasern und fixpunktfrei operiert (Lemma 2.6).

7) **Riemannsche Flächen als Quotientenraum / Möbiustransformationen** *(Imayoshi/Taniguchi, S.32-36)*
Es soll gezeigt werden, wie Riemannsche Flächen als Quotientenraum realisiert werden können. Anschließend werden biholomorphe Automorphismen einfach zusammenhängender Riemannscher Flächen klassifiziert und einige Eigenschaften von Möbiustransformationen besprochen, wie Konjugationsklassen von Möbiustransformationen und der Zusammenhang von Möbiustransformationen mit $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

8) **Fuchssche Modelle** *(Imayoshi/Taniguchi, S.37-42)*
Möbiustransformationen sollen unterteilt werden in solche, die elliptisch, parabolisch, hyperbolisch und loxodromisch sind, wobei auch auf den Zusammenhang mit der Anzahl der Fixpunkte eingegangen werden soll. Die Spur einer Möbiustransformation soll eingeführt werden. Anschließend sind Riemannsche Flächen nach ihrer universellen Überlagerung zu klassifizieren. Fundamentalbereiche sind zu definieren und vor allem sollten Beispiele gezeigt werden.

9) **Fuchssche Gruppen** *(Imayoshi/Taniguchi, S.43-46)*
Fuchssche Gruppen sind wichtige Objekte, denn sie sind Decktransformationsgruppen für Riemannsche Flächen, welche $\mathbb{H}$ als universelle Überlagerung haben. Deshalb sollen sie hier eingeführt werden und einige wichtige Eigenschaften besprochen werden, u.a., dass sie keine Häufungspunkte haben und eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{H}$ operieren. Zum Schluss ist zu zeigen, dass fuchsche Modelle von kompakten Riemannschen Flächen ($g \geq 2$) nur aus hyperbolischen Elementen (und der Identität) bestehen.

10) **Der Teichmüllerraum I** *(Imayoshi/Taniguchi, S.8-13)*
In diesem Vortrag soll T_1, der Teichmüllerraum vom Geschlecht 1, eingeführt werden. Dazu ist zunächst die Definition des Modulraums erforderlich. Dieser wird dann für kompakte Riemannsche Flächen vom Geschlecht 1 (Tori) explizit ermittelt. Eine erste Definition von T_1 wird dann gegeben, wobei die dazu erforderlichen Markierungen von Tori als Erzeugendensystem der Fundamentalgruppe angegeben werden. Damit kann gezeigt werden, dass T_1 mit $\mathbb{H}$ identifiziert werden kann. Dann folgt eine zweite Definition von T_1, diesmal mit orientierungserhaltenden Diffeomorphismen als Markierungen und es soll gezeigt werden,

dass beide Definitionen äquivalent sind.

11) **Der Teichmüllerraum II** *(Imayoshi/Taniguchi, S.14-16; 47-49)*
Die Definitionen von T_1 aus dem letzten Vortrag sollen auf T_g, den Teichmüllerraum vom Geschlecht g, übertragen werden. Die Äquivalenz beider Definitionen ist - wie für T_1 - wieder zu zeigen. Dazu sollte vorher der Satz von Dehn-Nielsen formuliert werden (ohne Beweis). Die Abbildungsklassengruppe soll eingeführt werden und dann der Fricke-Raum, eine Parametrisierung von T_g, die auf die fuchsschen Modelle zurückgreift, eingeführt werden.

12) **Metrik auf Riemannschen Flächen** *(Katok, S.1-8; Imayoshi/Taniguchi, S.54f)*
Dieser Vortrag hat differentialgeometrischen Charakter. Hier geht es darum, Abstandsfunktionen auf (kompakten) Riemannschen Flächen von Geschlecht $g \geq 2$ einzuführen. Dazu soll zunächst die hyperbolische Metrik auf $\mathbb{H}$, bzw. auf $\mathbb{D}$ definiert werden. Damit lassen sich Abstände messen und Geodätische auf $\mathbb{H}$, bzw. auf $\mathbb{D}$ definieren. Zu zeigen ist in diesem Vortrag, dass $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{H})$. (Katok, S.1-8, ohne nochmals auf die Spur, sowie den Zusammenhang zwischen Möbiustransformationen und $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf S.2f einzugehen und ohne Thm. 1.2.5 und 1.2.6) Die hyperbolische Metrik überträgt sich von $\mathbb{H}$ auf die Riemansche Fläche. Somit kann man dort auch von Geodätischen sprechen. Zum Schluss sollen damit Hosen definiert werden. (Imayoshi / Taniguchi, S.54f)

13) **Hosenzerlegung** *(Imayoshi/Taniguchi, S.56-60)*
Die Hosen, die im vorangegangenen Vortrag definiert worden sind, stehen hier im Mittelpunkt. Es soll ihre Existenz für ein beliebig vorgegebenes positives Zahlentripel für die Länge der Randkurven bewiesen werden, sowie deren Eindeutigkeit. Anschließend soll auf die Hosenzerlegung kompakter Riemannscher Flächen näher eingegangen werden.

14) **Fenchel-Nielsen-Koordinaten** *(Imayoshi/Taniguchi, S.61-67)*
Die geodätische Längenfunktion und die Twist-Parameter werden eingeführt. Mit diesen Daten, die aus der Hosenzerlegung einer kompakten Riemannschen Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$ hervorgehen, lassen sich Parameter angeben für den entsprechenden Punkt im Teichmüllerraum T_g, die sog. „Fenchel-Nielsen Koordinaten“.

15) **Fricke-Klein-Einbettung** *(Imayoshi/Taniguchi, S.67-71)*
Die Fricke-Klein Einbettung ist eine weitere Möglichkeit, Koordinaten für Punkte in T_g anzugeben, indem man den Fricke-Raum in den $(\mathbb{R}^+)^{9g-9}$ einbettet. Diese $9g-9$ Koordinaten kommen alle von geodätischen Längenfunktionen, d.h., dass einiges über hyperbolische Geometrie gesagt werden muss.

Literatur: O. Forster *Riemannsche Flächen* (bzw. die englische Übersetzung davon)
W. Fulton *Algebraic Topology*
Y. Imayoshi / M. Taniguchi *An Introduction to Teichmüller Spaces*
(K. Jänich *Topologie* - hier werden Überlagerungen anschaulich eingeführt)
S. Katok *Fuchsian Groups*