Vorträge

Vortrag 1: Modulformen

In diesem Vortrag werden Modulformen sowie Spitzenformen eingeführt. Dazu wird eine Operation der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf der oberen Halbebene definiert, und eventuell noch ein Fundamentalbereich für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ angegeben. Desweiteren soll gezeigt werden, dass sich Modulformen in eine Fourierreihe entwickeln lassen. Am Ende sollte auch noch kurz auf die Dimension der Räume der Modulformen eingegangen werden.

Vortrag 2: L-Funktionen und Heckes Umkehrsatz (S.31- S.37)

Hier werden nun L-Reihen zu Spitzenformen definiert und gezeigt, dass diese in einer rechten Halbebene konvergieren, eine analytische Fortsetzung zu einer ganzen Funktion auf $\mathbb{C}$ haben, sowie eine Funktionalgleichung erfüllen. Dann wird Heckes Umkehrsatz bewiesen, d.h eine Dirichletreihe, die oben genannte analytische Eigenschaften hat, ist die L-Reihe einer Spitzenform.

Vortrag 3: Heck-Operatoren und Eigenfunktionen (S.38- S.50)

Hier werden die Hecke-Operatoren eingeführt und gezeigt, dass die Räume der Modul- bzw. Spitzenformen eine Basis aus simultanen Eigenfunktionen der Hecke-Operatoren haben. Dazu wird das Petersson-Skalarprodukt eingeführt und, falls nicht schon in Vortrag 1 definiert, ein Fundamentalbereich für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ angegeben. Anschließend wird gezeigt, dass die L-Reihe eine sogenannte Eulerprodukt-Darstellung hat.

Vortrag 4: Automorphe Darstellungen der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ((S.81-S.88),S.89- S.96)

Zunächst soll kurz erklärt werden was topologische Gruppen und Haarmaße auf diesen Gruppen sind. Dann werden (irreduzible) Darstellungen von Gruppen (in einen Vektorraum) definiert; insbesondere beschäftigen wir uns mit Darstellungen der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ in den Hilbertraum $L^2(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$. Anschließend soll gezeigt werden, dass sich Modulformen in diesen Hilbertraum isometrisch einbetten lassen.

Vortrag 5: p-adische Zahlen (S.103- S.113)

In diesem Vortrag wird erst die sogenannte p-adische Bewertung auf $\mathbb{Q}$ eingeführt. $\mathbb{Q}$ wird dann bezüglich dieser Bewertung vervollständigt: wir erhalten den Körper der p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$. Es soll noch eine alternative Konstruktion von $\mathbb{Q}_p$ mittels Potenzreihen angegeben werden, wobei auch die ganzen p-adischen Zahlen $\mathbb{Z}_p$ definiert werden. Am Ende sollte noch kurz auf die Topologie von $\mathbb{Q}_p$ sowie Haarmaße der Gruppe $(\mathbb{Q}_p, +)$ eingegangen werden.

Vortrag 6: Adele und starke Approximation (S.123- S.129)

Zunächst werden ganz allgemein eingeschränkte Produkte topologischer Räume eingeführt, und anschließend werden der Ring der Adele und die zugehörige Einheitengruppe, die Idele, definiert. Dann sollen noch die Approximationsstze für $\mathbb{A}, \mathbb{A}^\times$ und eventuell auch für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$ und $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ gezeigt werden.

Vortrag 7: Automorphe Darstellungen der $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ (S.157- S.167)

Erst werden Darstellungen der $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ eingeführt, sogennante Hauptreihendarstellungen. Falls nicht schon in Vortrag 6 gezeigt, werden hier noch Approximationssätze für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{A})$ und $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ bewiesen. Dann wird gezeigt, dass der Hilbertraum $L^2(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ als $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$-Modul isomorph zu einem Unterraum des Hilbertraumes $L^2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}))$ ist. Auf diese Weise lassen sich die klassischen Modulformen mit quadratisch-integrierbaren Funktionen auf $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ identifizieren.

Vortrag 8: Bochner-Integral und kompakte Operatoren (S.168- S.177)

Hier werden nun einige Techniken zur Verfügung gestellt, die wir im Folgenden brauchen werden. Es wird ein vektorwertiges Integral, das Bochner-Integral, eingeführt, sowie gezeigt, unter welchen Bedingungen eine Darstellung in eine direkte Summe irreduzibler Unterdarstellungen zerfällt.

Vortrag 9: Tensorprodukt I (S.181- S.187, (S.187- S.189)

In diesem Vortrag wird zunächst das Tensorprodukt von Vektorräumen eingeführt, sowie das unendliche Tensorprodukt lokaler Darstellungen der Gruppen $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, welches eine Darstellung von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ ist. Eventuell werden noch einige Sätze aus dem folgenden Abschnitt hinzugenommen.

Vortrag 10: Tensorprodukt II (S.187- S.200)

Hier werden zuerst zulässige Darstellungen definiert, und anschließend gezeigt, dass zulässige unitäre Darstellungen von $GL_2(\mathbb{A})$ äquivalent zu einem Tensorprodukt lokaler Darstellungen sind.

Vortrag 11: Spitzenformen und zulässige Darstellungen (S.96- S.98, S.177-S.180, S.201)

In diesem Vortrag wird zunächst die Exponentialabbildung $\mathrm{Exp} : M_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ definiert. Ist V ein Darstellungsraum von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, so kann auch eine Operation von $M_2(\mathbb{R})$ mittels Exp definiert werden. Dann soll mithilfe dieser Operation gezeigt werden, dass der Unterraum $L_0^2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\setminus \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}))$ der sogenannten cuspidalen Funktionen von $L^2(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})\setminus \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}))$ in eine direkte Summe irreduzibler Unterräume zerfällt. Anschließend wird gezeigt, dass diese irreduziblen Unterdarstellungen äquivalent zu einem Tensorprodukt lokaler Darstellungen ist.

Vortrag 12: lokale L-Funktion (S.206- S.218

Hier führen wir die Satake-Transformation ein, die einen Algebren-Isomorphismus zwischen bestimmten Funktionen auf $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ und einer Unteralgebra der Gruppenalgebra $\mathbb{C}[A]$ liefert, wobei A eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ist. Damit können wir sogenannte lokale L-Faktoren zu lokalen Darstellungen der $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ definieren. Hier tauchen auch die in Vortrag 7 definierten Hauptreihen-Darstellungen wieder auf.

Eventuell kann dieser Vortrag entlastet werden, indem Einiges in den folgenden Vortrag übernommen wird.

Vortrag 13: globale L-Funktion (S.219- S. 229)

In diesem Vortrag wird die (partielle) globale L-Funktion zu einer Darstellung der $\mathrm{GL}_2()$ definiert, sowie auch das globale Zeta-Integral. Es wird nachgewiesen, dass dieses in einer rechten Halbebene lokal-gleichmäßig konvergiert, eine Fortsetzung zu einer analytischen Funktion hat und eine Funktionalgleichung erfüllt.

Vortrag 14: Zusammmenhang zur klassischen Theorie