Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
J.-B. Kordaß M.Sc.

Differentialgeometrie (WS 2016)

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. (1) Es seien $\mathrm{S}^n = \{(x^0,\dots,x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n}(x^i)^2 = 1\}$, $N = (1,0,\dots,0)$ und $S = (-1,0,\dots,0)$. Weiter seien die folgenden Abbildungen gegeben, die man als *stereographische Projektion bezüglich N bzw. S* bezeichnet.

$$\varphi : \mathrm{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto \left(\tfrac{x^1}{1-x^0},\dots,\tfrac{x^n}{1-x^0}\right),$$
$$\psi : \mathrm{S}^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto \left(\tfrac{x^1}{1+x^0},\dots,\tfrac{x^n}{1+x^0}\right).$$

Zeigen Sie, dass $\{(\varphi, \mathrm{S}^n \setminus \{N\}), (\psi, \mathrm{S}^n \setminus \{S\})\}$ ein glatter Atlas für S^n ist.

(2) Für $i = 0,\dots,n$ sei $U_i^\pm = \{(x_0,\dots,x_n) \in \mathrm{S}^n | \pm x_i > 0\}$ und

$$\varphi_i^\pm : U_i^\pm \to \mathbb{R}^n, (x^0,\dots,x^n) \mapsto (x^0,\dots,x^{i-1},x^{i+1},\dots,x^n).$$

Zeigen Sie, dass $\left\{(\varphi_i^\varepsilon, U_i^\varepsilon)\middle| i = 0,\dots,n, \varepsilon \in \{+,-\}\right\}$ ein glatter Atlas ist, der mit dem durch stereographische Projektion gegebenen verträglich ist.

Aufgabe 2.
Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension m mit Atlas $\mathcal{A}_M$. Eine Teilmenge $S \subset M$ heißt *Untermannigfaltigkeit* von M, falls es ein $s \in \{0,\dots,m\}$ und um jeden Punkt $p \in N$ eine Karte $(U,\phi) \in \mathcal{A}_M$ gibt, sodass

$$\phi(U \cap S) = \phi(U) \cap (\{0\}^{m-s} \times \mathbb{R}^s).$$

Eine solche Karte heißt auch *adaptierte Karte*.

(1) Finden Sie einen geeigneten Atlas $\mathcal{A}_S$ auf S, sodass $(S, \mathcal{A}_S)$ der Definition einer glatten Mannigfaltigkeit gemäß Vorlesung genügt.

(2) Zeigen Sie, dass die sogenannte *Diagonale* $\Delta_M := \{(x,y) \in M \times M \mid x = y\}$ eine Untermannigfaltigkeit von $M \times M$ ist.

(3) Nun sei N eine weitere glatte Mannigfaltigkeit und $f\colon M \to N$ eine glatte Abbildung. Zeigen Sie, dass der *Graph* der Abbildung f, definiert durch

$$\mathrm{Graph}(f) := \{(x, f(x)) \in M \times N \mid x \in M\},$$

eine Untermannigfaltigkeit von $M \times N$ ist.

Eine glatte Abbildung $\Phi\colon M \to N$ heißt *Diffeomorphismus*, falls diese bijektiv ist und die Umkehrabbildung $\Phi^{-1}\colon N \to M$ ebenfalls glatt ist.

(4) Zeigen Sie, dass Graph(f) diffeomorph zu M selbst ist.

Aufgabe 3. (1) Zeigen Sie, dass der Rotationstorus T_{r_1,r_2} eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist, wobei

$$T_{r_1,r_2} := \left\{ \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 + r_2\cos t \\ 0 \\ r_2 \sin t \end{pmatrix} \;\middle|\; \phi \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

für $0 < r_2 < r_1$.

(2) Zeigen Sie, dass T_{r_1,r_2} diffeomorph zum Produkt-Torus $T := S^1 \times S^1$ ist.

Abgabe bis Montag, den **31. Oktober**, vor der Übung oder direkt beim Übungsleiter.