Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
J.-B. Kordaß M.Sc.

Differentialgeometrie (WS 2016)

Übungsblatt 10

Aufgabe 1.
Es sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, sowie $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ die durch g induzierte Abstandsfunktion. Zeigen sie folgende Aussagen:

(1) Die durch die Metrik d gegebene Topologie stimmt mit der Topologie der glatten Mannigfaltigkeit M überein.

(2) Es sei (N, h) eine weitere zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein Diffeomorphismus $\Phi\colon M \to N$ ist genau dann eine Isometrie, wenn $\mathcal{L}(\gamma) = \mathcal{L}(\Phi \circ \gamma)$ für jede stückweise glatte Kurve γ auf M gilt.

Aufgabe 2.
Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p, q \in M$. Weiter sei $c\colon [0, 1] \to M$ eine stückweise glatte Kurve von p nach q der Länge $\mathcal{L}(c) = d(p, q)$. Zeigen Sie, dass c eine umparametrisierte Geodätische ist, also $\nabla_t \dot{c} \equiv 0$ gilt.

Aufgabe 3. (1) Es seien M und N Riemannsche Mannigfaltigkeiten und es sei $c = (c_1, c_2)$ eine glatte Kurve im Riemannschen Produkt $M \times N$. Zeigen Sie, dass c genau dann eine Geodätische in $M \times N$ ist, wenn c_1 und c_2 Geodätische in M resp. N sind.

(2) Beschreiben Sie alle Geodätischen auf der Untermannigfaltigkeit

$$T := \{(x_1, \ldots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^4$$

von $\mathbb{R}^4$ versehen mit der induzierten Metrik.