Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Prof. Dr. W. Tuschmann
J.-B. Kordaß M.Sc.

Differentialgeometrie (WS 201617)

Übungsblatt 4

Aufgabe 1.
Es sei für $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\langle x, y \rangle := -x^0 y^0 + x^1 y^1 + \cdots + x^n y^n,$$

sowie

$$\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = -1, x^0 > 0\}.$$

(1) Zeigen Sie, dass $\mathbb{H}^n$ eine glatte Mannigfaltigkeit ist, durch $\langle .\,, . \rangle$ für alle $p \in \mathbb{H}^n$ ein Skalarprodukt auf $\mathrm{T}_p \mathbb{H}^n \subset \mathrm{T}_p \mathbb{R}^{n+1}$ definiert wird und die Gesamtheit dieser Skalarprodukte eine Riemannsche Metrik g auf $\mathbb{H}^n$ ist.

Die Riemannsche Mannigfaltigkeit $(\mathbb{H}^n, g)$ heißt *n-dimensionaler hyperbolischer Raum.*

(2) Es sei $s = (-1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung ϕ mit

$$\phi(x) := s - \frac{2(x - s)}{\langle x - s, x - s \rangle}, \quad x \in \mathbb{H}^n,$$

ein Diffeomorphismus von $\mathbb{H}^n$ auf $\{\xi \in \mathbb{R}^n \cong \{0\} \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\xi\| < 1\}$ ist.

Aufgabe 2.
Es sei $(S^n(r), g)$ die runde Sphäre vom Radius r. Berechnen Sie die Darstellung $g^\varphi = (g_{ij}^\varphi)_{i,j}$ der Riemannschen Metrik g bezüglich einer durch stereographische Projektion auf den $\mathbb{R}^n$ gegebenen Karte φ (vgl. Übungsblatt 1 Aufgabe 1).

Aufgabe 3.
Es sei ∇ der Zusammenhang auf $\mathbb{R}^3$, für den gilt:

$$\nabla_X Y = Z, \quad \nabla_Y X = -Z, \quad \nabla_X Z = -Y, \quad \nabla_Z X = Y, \quad \nabla_Y Z = X, \quad \nabla_Z Y = -X$$

und

$$\nabla_X X = \nabla_Y Y = \nabla_Z Z = 0,$$

wobei $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y}$ und $Z = \frac{\partial}{\partial z}$ die Koordinatenvektorfelder auf $\mathbb{R}^3$ sind.

Zeigen Sie, dass ∇ metrisch ist, und bestimmen Sie den Torsionstensor von ∇.