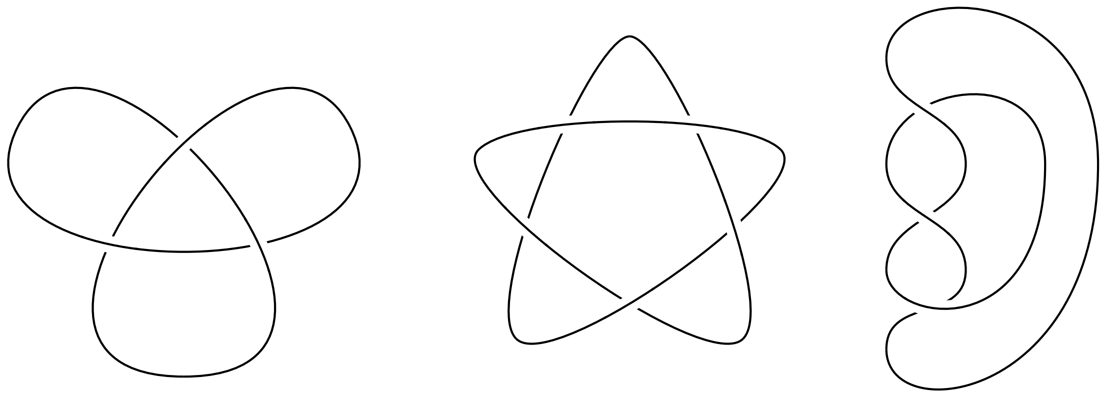
Institut für Algebra und Geometrie
Sommersemester 2014
Dr. Manuel Amann
Dipl.-Math. Werner Thumann

Übungen zu

Knotentheorie

Blatt 2

Aufgabe 1. Stellen die drei folgenden Knotendiagramme die gleichen Knoten dar? Welche können alleine durch Isotopien der Ebene ineinander überführt werden?



Aufgabe 2. Nach Vorlesung heißt ein metrischer Raum (X,d) *kompakt*, falls jede Folge eine in X konvergente Teilfolge besitzt.

a) Zeigen Sie, dass $A \subseteq X$ genau dann abgeschlossen ist, wenn der Grenzwert einer jeden Folge in A, welche in X konvergiert, bereits in A liegt (vergleiche Aufgabe 3 auf Blatt 1 für den Begriff *abgeschlossen*).

b) Sei X kompakt und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Zeigen Sie, dass dann auch A (mit Unterraummetrik) kompakt ist.

c) Sei X ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ (mit Unterraummetrik) kompakt. Zeigen Sie, dass A in X abgeschlossen ist.

d) Sei X kompakt und $f\colon X \to Y$ stetig. Zeigen Sie, dass auch $f(X)$ (mit Unterraummetrik) kompakt ist.

e) Nutzen Sie die obigen Resultate, um zu zeigen, dass eine bijektive stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ von metrischen Räumen bereits ein Homöomorphismus ist, falls X kompakt ist.

   Hinweis: Nutzen Sie die Charakterisierung von Stetigkeit über abgeschlossene Mengen aus Aufgabe 3 auf Blatt 1.

Aufgabe 3.

a) Unter Benutzung der stetigen surjektiven Peano Kurve $\mathscr{P}\colon (0,1) \to (0,1)^2$ aus der Vorlesung, geben Sie eine surjektive stetige Abbildung $(0,1) \to (0,1)^3$ an.

b) Zeigen Sie, dass es nur zwei stetige Abbildung $(0,1) \to \{0,1\}$ gibt. Dabei trage $\{0,1\}$ die diskrete Metrik.

Sei $x \in (0,1)$. Wieviele stetige Abbildungen $(0,1) \setminus \{x\} \to \{0,1\}$ gibt es?

Sei $z \in (0,1)^3$. Zeigen Sie, dass je zwei Punkte in $(0,1)^3 \setminus \{z\}$ durch einen stetigen Weg verbunden werden können. Begründen Sie damit, dass es nur zwei stetige Abbildung $(0,1)^3 \setminus \{z\} \to \{0,1\}$ geben kann.

c) Folgern Sie aus b), dass es keinen Homöomorphismus $(0,1) \to (0,1)^3$ geben kann. Insbesondere ist die Peano Kurve kein Homöomorphismus, also kein Knoten.

Aufgabe 4. Sei B der abgeschlossene Einheitsball in $\mathbb{R}^2$, also

$$B := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$$

Seien weiter $i\colon B \to B$ die Identität und $c\colon B \to B$ die konstante Abbildung $c(x) = 0$.

a) Geben Sie eine Homotopie $H\colon B \times I \to B$ von i nach c und eine von c nach $-i$ an. Dabei ist $-i\colon B \to B$ die Abbildung $(-i)(x) = -x$.

b) Kombinieren Sie diese Homotopien, um eine von i nach $-i$ zu erhalten, welche keine Isotopie ist.

c) Geben Sie eine Isotopie von i nach $-i$ an.