16.04.2015
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Jonas Hirsch

Karlsruhe Institute of Technology

Analysis 2

1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (K, 4 Punkte)

Die Ausgleichsgerade $y = a\,x + b$ zu den Messdaten $\{(x_k, y_k) : k = 1, \dots, N\}$ ist dadurch bestimmt, dass der Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ die Quadratsumme

$$f(a,b) := \sum_{k=1}^{N} (a\,x_k + b - y_k)^2$$

minimiert. Überlegen Sie, ob es solch einen Punkt gibt und wenn ja, bestimmen Sie ihn.

Aufgabe 2 (K, 4 Punkte)

1. Für $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ sei $\Phi(t, x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. Zeigen Sie, dass Φ eine Lösung der *Wärmeleitungsgleichung*
$$\partial_t \Phi - \Delta \Phi = 0$$
ist.
2. Zeigen Sie, dass für $f, g \in C^2(\mathbb{R})$, $c > 0$ und $k \in \mathbb{R}^n$ mit $c^2 = |k|^2$ die Funktion $u : (0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$, $u(t, x) = f(\langle k, x\rangle - ct) + g(\langle k, x\rangle + ct)$ eine Lösung der *Wellengleichung*
$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0$$
ist.

Hinweis: Δ bezeichnet hier den Laplaceoperator in den räumlichen Koordinaten d.h. $\Delta f = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f$.

Aufgabe 3

Seien $U, V \subset \mathbb{R}^2$. Eine surjektive Abbildung $f \in C^1(U, V)$ heisst konform, falls eine stetige Funktion $\lambda : U \to \mathbb{R}^+$ existiert, sodass für alle $x \in U$ und alle $i, j \in \{1, 2\}$ gilt:

$$g_{ij}(x) := \langle \partial_i f(x), \partial_j f(x)\rangle = \lambda^2(x)\, \delta_{ij}. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass eine Funktion $u \in C^2(V, \mathbb{R})$ genau dann harmonisch auf $V \subset \mathbb{R}^2$ ist (d.h. $\Delta u(x) = 0$ für alle $x \in V$), falls für jede konforme Abbildung $f \in C^2(U, V)$ die Funktion $u \circ f$ harmonisch auf U ist.

Aufgabe 4 (K, 4 Punkte)

Sei $L : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t, y, p) \mapsto L(t, y, p)$ zweimal stetig partiell differenzierbar und für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gegeben sei $K := \{\varphi \in C^2([a, b]) : \varphi(a) = c_1, \varphi(b) = c_2\}$. Wir definieren ein Funktional $S : K \to \mathbb{R}$ durch

$$S(\varphi) = \int_a^b L(t, \varphi(t), \varphi'(t))\, dt.$$

Ein Minimierer des Funktionals S erfüllt die Euler-Lagrange Gleichung (siehe Analysis 1, Kapitel XIII)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial p}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) - \frac{\partial L}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0.$$

1. Zeigen Sie, dass für ein zeitunabhänges L (d.h. $L(t, y, p) = L(y, p)$) und eine Lösung φ der zugehörigen Euler-Lagrange Gleichung, die Energie

   $$E(t) = \varphi'(t)\frac{\partial L}{\partial p}(\varphi(t), \varphi'(t)) - L(\varphi(t), \varphi'(t))$$

   konstant ist.
2. Sei nun $L(y, p) = y\sqrt{1 + p^2}$. Berechnen Sie hierfür die Euler-Lagrange Gleichung und die Energie E.
3. Bestimmen Sie mindestens eine nicht-konstante Lösung der Euler-Lagrange Gleichung.

Abgabe: Freitag, 24.04.2015, 11:30 Uhr.