18.06.2015
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Jonas Hirsch

Karlsruhe Institute of Technology

Analysis 2

10. Übungsblatt

Aufgabe 1

Es seien die beiden Kreisscheiben $B_\varepsilon(z) \subset B_1(0)$ in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ gegeben. Konstruieren Sie eine Homotopie zwischen den positiv durchlaufenen Kreisen $\partial B_\varepsilon(z)$ und $\partial B_1(0)$, deren Bild in $\overline{B_1(0)} \setminus B_\varepsilon(z)$ enthalten ist.

Aufgabe 2 (K, 4 Punkte)

Die Polarkoordinatenabbildung ist definiert durch

$$\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \quad \varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Berechnen Sie den Pullback $\varphi^*\omega$ der folgenden 1-Formen:

1. $\omega = g(\sqrt{x^2+y^2})\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ für $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,
2. $\omega = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$ und
3. $\omega = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$.

Aufgabe 3 (K, 4 Punkte)

Schreiben Sie Real- und Imaginärteil des Kurvenintegrals

$$\int_\gamma f(z)\, dz \text{ mit } f(z) = \frac{1}{z}$$

als Integrale über geeignete reelle 1-Formen.

1. Zeigen Sie, dass der Realteil exakt ist.
2. Zeigen Sie, dass der Imaginärteil geschlossen, aber nicht exakt ist.
3. Bestimmen Sie eine komplexe Stammfunktion von $f(z)$ auf $\mathbb{C} \setminus \{(x,0)\colon x \leq 0\}$.

Aufgabe 4 (K, 4 Punkte)

In dieser Aufgabe berechnen wir die Fresnel-Integrale

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\, dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \sin(x^2)\, dx.$$

In Analysis 1, Blatt 14, Aufgabe 3, wurde gezeigt, dass zumindest das zweite uneigentliche Riemann-Integral exisitiert und endlich ist. Zur genauen Berechnung der Integrale gehen wir wie folgt vor: Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^{-z^2}$ und für $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$, definieren wir die Kurven $\gamma_i : [0,R] \to \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq 3$, durch

- $\gamma_1(t) = t$,
- $\gamma_2(t) = R + it$ und
- $\gamma_3(t) = (1+i)t$.

Zeigen Sie:

1. f ist holomorph auf $\mathbb{C}$ und $\int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_2} f\,dz = \int_{\gamma_3} f\,dz$.
2. $\lim_{R\to\infty} \left|\int_{\gamma_2} f\,dz\right| = 0$ und $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
3. $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_3} f\,dz = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^\infty e^{-it^2}\,dt$.
4. Zerlegen Sie das Integral $\int_0^\infty e^{-it^2}\,dt$ in Real- bzw. Imaginärteil und schliessen Sie damit
$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx = \int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Abgabe: Freitag, 26.06.2015, 11:30 Uhr.