25.06.2015
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Jonas Hirsch

Karlsruhe Institute of Technology

Analysis 2

11. Übungsblatt

Aufgabe 1 (K, 4 Punkte)

Berrechnen Sie die folgenden komplexen Kurvenintegrale mit Hilfe der Cauchy Integralformel. (Setzen Sie sin und cos mittels der Potenzreihendarstellung auf ganz $\mathbb{C}$ fort.)

1. $\int_{\partial B_2(0)} \frac{\sin z}{z+i}\, dz$
2. $\int_{\partial B_3(-2i)} \frac{1}{z^2+\pi^2}\, dz$
3. $\int_{\partial B_3(0)} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1}\, dz$.
4. Berechnen Sie das komplexe Integral
$$\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}\, d\theta,$$
indem Sie es als ein komplexes Kurvenintegral über eine geeignet gewählte Funktion schreiben, und wenden Sie dann die Cauchy Integralformel an.
5. Sei $B_1(0) \subset \mathbb{C}$ und $f \in C^1(B_1(0))$, $f(z) = u(z) + iv(z)$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie, dass für alle $0 < r < 1$ die Identität
$$\int_0^{2\pi} u^2(re^{i\theta})\, d\theta = \int_0^{2\pi} v^2(re^{i\theta})\, d\theta$$
genau dann gilt, falls $u^2(0) = v^2(0)$.

Aufgabe 2 (K, 4 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfgangswertprobleme:

1. $\dot{x} = t\sin(x)$ mit $x(0) = \frac{\pi}{2}$;
2. $\dot{x} + \frac{t}{2x} = \frac{3x}{2t}$ mit $x(1) = 1$

Aufgabe 3

1. Führen Sie die Gleichung $\dot{x} = f(at + bx + c)$, $a, b \in \mathbb{R}$, durch eine geeignete Transformation auf eine Gleichung mit getrennten Variablen zurück.
2. Lösen Sie das Anfangswertproblem $\dot{x} = (t + x)^2$ mit $x(0) = 0$.

Aufgabe 4 (K, 4 Punkte)

1. Transformieren Sie die Gleichung $\dot{x} = f(\frac{x}{t})$, $t > 0$ in eine Gleichung mit getrennten Variablen.
2. Bestimmen Sie alle Lösungen von $\dot{x} = \frac{x}{t}\left(\frac{x}{t} + 1\right)$ mit $x(1) = x_1 \neq 0$.

Abgabe: Freitag, 03.07.2015, 11:30 Uhr.