02.07.2015
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Jonas Hirsch

Karlsruhe Institute of Technology

Analysis 2

12. Übungsblatt

Aufgabe 1 (K, 4 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass sich die *Bernoulli-Gleichung*

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x^\alpha$$

für $\alpha \neq 0, 1$, a, b stetig, $x(0) \geq 0$, mittels einer Transformation der Form $u = x^p$ mit geeignetem p auf eine lineare, inhomogene Gleichung zurückführen lässt. Was ist mit den Fällen $\alpha = 0, 1$?

2. Zeigen Sie, dass die *Riccati-Gleichung*

$$\dot{x} + a(t)x + b(t)x^2 = \varphi(t)$$

mit a, b, φ stetig, unter Kenntnis einer speziellen Lösung $x_*(t)$ mit dem Ansatz $x(t) = y(t) + x_*(t)$ auf eine Bernoulli-Gleichung für $y(t)$ zurückgeführt werden kann.

Aufgabe 2 (K, 4 Punkte)

Das skalierte Volterra-Lotka-System mit Sättigung lautet

$$\text{(SVLS)} \quad \begin{cases} \dot{u} = u - \kappa u^2 - uv, \\ \dot{v} = -\varepsilon v + uv. \end{cases}$$

Dabei sind $\varepsilon > 0$ und $\kappa \geq 0$ Konstanten. Zeigen Sie, dass dieses System für Anfangswerte $u(0) = u_0 > 0$, $v(0) = v_0 > 0$ eindeutig bestimmte Lösungen besitzt, die für $t \geq 0$ positiv bleiben und dort global existieren.

Aufgabe 3

1. Beweisen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = (t^2 - x^2)^{3/2}, \quad x(0) = 0,$$

genau eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ besitzt.

2. Sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) e^{-x^2}\, dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie $u(t)$, indem Sie eine Differentialgleichung für $u(t)$ aufstellen, und das zugehörige Anfangswertproblem mit

$$u(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

lösen.

Aufgabe 4 (K, 4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzstetig mit Konstante $L \in [0, \infty)$. Zeigen Sie für zwei Lösungen $u, v : (\alpha, \beta) \to \Omega$, $\alpha < 0 < \beta$, der gewöhnlichen Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ die Abschätzung

$$|u(t) - v(t)| \leq e^{L|t|} |u(0) - v(0)| \quad \forall\, t \in (\alpha, \beta)$$

gilt.

Aufgabe 5

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und gelte

$$f(t, x) \leq 0 \text{ für } tx > 0, \qquad f(t, x) \geq 0 \text{ für } tx < 0.$$

Zeigen Sie, dass $x(t) \equiv 0$ die einzige Lösung der Gleichung $\dot{x} = f(t, x)$ mit Anfangswert $x(0) = 0$ ist.

Abgabe: Freitag, 10.07.2015, 11:30 Uhr.