23.04.2015
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Jonas Hirsch

Karlsruhe Institute of Technology

Analysis 2

2. Übungsblatt

Aufgabe 1 (K, 4 Punkte)

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie für $f \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

1. Für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und alle $t > 0$ gilt $f(tx) = t^\alpha f(x)$.
2. Für alle $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ gilt $Df(x)x = \alpha f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Ist eine der beiden Aussagen erfüllt, so nennt man f homogen vom Grad α.

Aufgabe 2

Für $1 \leq p < \infty$ sind die p-Normen definiert durch

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1. Weisen Sie nach, dass $\|\cdot\|_p$ in $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ stetig partiell differenzierbar ist. Zeigen sie weiter, dass $\|\cdot\|_p$ im Punkt $0 \in \mathbb{R}^n$ nicht differenzierbar ist.
2. Bestimmen Sie den Gradienten von $\|\cdot\|_p$ für alle Punkte $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

Aufgabe 3 (K, 4 Punkte)

Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$, $f(A) = \det(A)$.

1. Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist.
2. Sei $\mathbf{1}$ die Identitätsmatrix des $\mathbb{R}^{n \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass die Richtungsableitung in $\mathbf{1}$ in Richtung B gegeben ist durch:

$$Df(\mathbf{1})B = trB$$

(Die Spur $tr(B)$ einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit den Einträgen $B = (b_{ij})$ ist definiert als $tr(B) = \sum_{i=1}^n b_{ii}$.)

3. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det(A) \neq 0$. Zeigen Sie:

$$Df(A)B = \det(A) tr(A^{-1}B)$$

Aufgabe 4 (K, 4 Punkte)

1. Sei K eine kompakte, konvexe Menge in $\mathbb{R}^n$ mit $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$, die symmetrisch zum Ursprung ist (d.h. mit $x \in K$ ist auch $(-x) \in K$). Zeigen Sie, dass durch

$$\|x\| := \inf\{\lambda > 0 : \ \frac{x}{\lambda} \in K\}$$

eine Norm definiert ist.

2. Für eine beliebige Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir die konvexe Hülle von M durch

$$\operatorname{conv}(M) := \bigcap_{\substack{M \subset K \\ K \text{konvex}}} K.$$

Zeigen Sie:

$$\operatorname{conv}(M) = \{\sum_{j=0}^{m} \lambda_j x_j : \ \ x_j \in M, \lambda_j \geq 0, \sum_{j=0}^{m} \lambda_j = 1\}.$$

Aufgabe 5

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene und konvexe Menge mit $K \neq \emptyset$ und $K \neq \mathbb{R}^n$.

1. Überlegen Sie sich, dass zu jedem Punkt $x_1 \in \mathbb{R}^n \backslash K$ genau ein Punkt $x_0 \in K$ existiert mit

$$|x_0 - x_1| = d(x_1, K) := \inf\{|x - x_1| : \ \ x \in K\}.$$

2. Zeigen Sie: Zu jedem $x \in \partial K$ existiert ein $\nu \in \mathbb{R}^n$ mit $|\nu| = 1$ und

$$K \subset \{y \in \mathbb{R}^n : \ \ \langle \nu, y - x \rangle \geq 0\}.$$

Die Menge $\{y \in \mathbb{R}^n : \ \ \langle \nu, y - x \rangle = 0\}$ heisst Stützhyperebene in $x \in \partial K$.

3. Eine Menge $H = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, a \rangle \leq c\}$ mit $a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und $c \in \mathbb{R}$ wird als abgeschlossener Halbraum bezeichnet. Wir definieren

$$\mathcal{H}_K := \{H \subset \mathbb{R}^n : H \text{ abgeschlossener Halbraum}, K \subset H, K \cap \partial H \neq \emptyset\}.$$

Zeigen Sie damit den sogenannten Trennungssatz:

$$K = \bigcap_{H \in \mathcal{H}_K} H.$$

Abgabe: Donnerstag, 30.04.2015, 11:30 Uhr.