30.04.2015
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Jonas Hirsch

Karlsruhe Institute of Technology

Analysis 2

3. Übungsblatt

Aufgabe 1 (K, 4 Punkte)

Bestimmen Sie die kritischen Punkte der folgenden Funktionen und bestimmen Sie deren Index, falls die kritischen Punkte nicht degeneriert sind. Skizzieren Sie den Verlauf der Höhenlinien (d.h. die Mengen $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x, y) = c\}$ mit entsprechenden Definition für g und h) in einer Umgebung der kritischen Punkte.

1. $f(x, y) = x - x^2 - y^2$
2. $g(x, y) = xy(x - 1)$
3. $h(x, y) = \sin(xy)$

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2).$$

1. Zeigen Sie, dass f in $(0, 0)$ kein lokales Extremum hat.
2. Sei G eine beliebige Gerade durch den Ursprung. Zeigen Sie, dass die Einschränkung $f|G : G \to \mathbb{R}$ ein isoliertes, lokales Minimum in $(0, 0)$ hat.

Aufgabe 3 (K, 4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

1. Zeigen Sie: Ist $\Delta u(x) \geq 0$ für alle $x \in \Omega$, so nimmt u sein Maximum auf dem Rand an, d.h.
$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$
Hinweis: Betrachten Sie zuerst den Fall $\Delta u > 0$ in Ω und dann $u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon |x|^2$ für $\varepsilon > 0$.
2. Zeigen Sie: Ist u harmonisch und existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $u(x) = c$ für alle $x \in \partial\Omega$, so gilt $u(x) = c$ für alle $x \in \overline{\Omega}$.

Aufgabe 4 (K, 4 Punkte (3 Bonuspunkte))

Gegeben seien drei Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ die nicht auf einer Gerade liegen und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = |A - x| + |B - x| + |C - x|.$$

1. Zeigen Sie, dass ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x_0) = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$ existiert.
2. Zeigen Sie, dass f strikt konvex ist und folgern Sie daraus die Eindeutigkeit von x_0.

3. Zeigen Sie unter der Annahme $x_0 \notin \{A, B, C\}$, dass

$$0 = \nabla f(x_0) = \frac{x_0 - A}{|A - x_0|} + \frac{x_0 - B}{|B - x_0|} + \frac{x_0 - C}{|C - x_0|}.$$

   Was bedeutet dies geometrisch?

4. (Zusatzaufgabe)
   a) Zeigen Sie: Entweder liegt x_0 im Inneren des Dreieckes mit den Ecken A, B, C, oder $x_0 \in \{A, B, C\}$.
   b) Zeigen Sie: Der Punkt x_0 liegt genau dann im Inneren des Dreiecks, falls alle Innenwinkel im Dreieck mit den Ecken A, B, C kleiner als $\frac{2\pi}{3}$ sind. Ist der Innenwinkel an einem der Eckpunkte des Dreiecks grösser oder gleich $\frac{2\pi}{3}$, so stimmt x_0 mit diesem Eckpunkt überein.
   c) Zeigen Sie: Sind alle Innenwinkel des Dreiecks mit den Ecken A, B, C kleiner als $\frac{2\pi}{3}$, so ist x_0 die einzige Nullstelle von ∇f in $\mathbb{R}^2$.

Abgabe: Freitag, 08.05.2015, 11:30 Uhr.