7.05.2015
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Jonas Hirsch

Karlsruhe Institute of Technology

Analysis 2

4. Übungsblatt

Aufgabe 1 (K, 4 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$u : \mathbb{R}^n \backslash \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + \ldots + x_n = 1\} \to \mathbb{R}, \quad u(x) := \frac{1}{1 - (x_1 + x_2 + \cdots x_n)},$$

im Entwicklungspunkt $0 \in \mathbb{R}^n$ und untersuchen sie diese auf Konvergenz.

Aufgabe 2 (K, 4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(\Omega)$. Der Graph von f ist die Menge

$$G = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in \Omega\}$$

und die Graphenabbildung von f ist

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}, \quad F(x) = (x, f(x)).$$

1. Berechnen Sie die Jacobimatrix von F in $x \in \Omega$.
2. Bestimmen Sie eine Basis von $T := \operatorname{Bild} DF(x)$.
3. Bestimmen Sie eine Einheitsnormale $\nu(x)$ an T im Punkt $x \in \Omega$, d.h. einen Vektor $\nu(x) \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $|\nu(x)| = 1$ und $\langle \nu(x), y \rangle = 0$ für alle $y \in T$.
4. Berechnen Sie die obigen Grössen nochmals explizit im Fall $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ und $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Fertigen Sie eine Skizze an.
5. Sei $p = (x, f(x)) \in G$. Für $\lambda > 0$ definieren wir die Mengen $G_{p,\lambda} := \frac{1}{\lambda}(G - p)$. Zeigen Sie: Es existiert eine Menge $\Omega_{x,\lambda} \subset \mathbb{R}^n$ und eine Funktion $f_{x,\lambda} : \Omega_{x,\lambda} \to \mathbb{R}$, sodass $G_{p,\lambda} = \{(z, f_{x,\lambda}(z)) : z \in \Omega_{x,\lambda}\}$. Zeigen Sie weiter, dass für alle $z \in \mathbb{R}^n$ gilt:
$$(z, f_{x,\lambda}(z)) \to (z, Df(x)z) \in T$$
mit $\lambda \searrow 0$.

Aufgabe 3 (K, 4 Punkte)

1. Sei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ und sei $f : B_1(0) \to \mathbb{R}^n$ definiert durch
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - |x|^2}}.$$
Zeigen Sie, dass f ein C^∞-Diffeomorphismus ist, und berechnen Sie die Ableitung von f.
2. Konstruieren Sie einen C^∞-Diffeomorphismus $g : B_1(0) \to (-1, 1)^n$.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch,

$$F(x, y) = \frac{1}{20\pi}\Big(xy + \cos(xy), 1 + y^2 - \sin(xy)\Big)$$

einen Fixpunkt $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ besitzt.

Aufgabe 5

Wir breiten einen Stadtplan von Karlsruhe auf dem Boden des Hertz-Hörsaals aus. Begründen Sie, dass es einen Punkt auf dem Stadtplan gibt, der genau dem Punkt darunter auf dem Boden entspricht. Geben Sie ein Verfahren an, wie man diesen Punkt näherungsweise finden kann.
Hinweis: Nehmen Sie das Stadtgebiet zur mathematischen Modellierung als (ebene) Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ an.

Abgabe: Freitag, 15.05.2015, 11:30 Uhr.