13.05.2015
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Jonas Hirsch

Karlsruhe Institute of Technology

Analysis 2

5. Übungsblatt

Aufgabe 1 (K, 4 Punkte)

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\lambda > 0$ und es gelte

$$|f(x) - f(y)| \geq \lambda |x - y| \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie:

1. f ist injektiv;
2. $Df(x)$ ist invertierbar für jedes $x \in \mathbb{R}^n$;
3. $f(\mathbb{R}^n)$ ist offen und abgeschlossen;
4. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist ein C^1-Diffeomorphismus.

Aufgabe 2 (K, 4 Punkte)

Sei $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ gegeben durch

$$g(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

1. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix Dg und bestimmen Sie, falls existent, ihre Inverse.
2. Zeigen Sie, dass g surjektiv ist und das jeder Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ genau zwei Urbildpunkte besitzt.
3. Sei $M := \overline{B_1(0)} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass $g : M \to M$ und g lokal injektiv auf M ist, d.h. für alle $(x_0, y_0) \in M$ existiert ein $r > 0$, sodass $g|_{B_r((x_0,y_0))}$ injektiv ist.

Aufgabe 3 (K, 4 Punkte)

1. Sei $1 < p < \infty$ und $L(x) = \frac{1}{p}|x|^p$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt: $D^2 L(x) > 0$. Berechnen Sie weiter die Legendretransformierte H von L und setzen Sie das Ergebnis in die Youngsche Ungleichung ein. Was erhalten Sie? Ist die Argumentation auch für $p = 1$ möglich?
2. Sei $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\nabla g : \mathbb{R}^n \to V = \nabla g(\mathbb{R}^n)$ injektiv gegeben, d.h. g hat eine injektive Gradientenabbildung. Eine Funktion $u \in C^1(U)$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist eine Lösung der Clairautschen Differentialgleichung, falls für alle $x \in U$ gilt:

$$u(x) - \langle x, \nabla u(x) \rangle = g(\nabla u(x)). \tag{1}$$

   a) Zeigen, dass für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $u(x) = \langle b, x \rangle + g(b)$ eine Lösung von (1) ist.
   b) Geben Sie eine weitere Lösung von (1) mittels der Legendretransformation an.

c) Sei nun $n = 1$, $U = (-\infty, 0)$ und $g(x) = e^x$. Bestimmen Sie in diesem Fall zwei Lösungen von (1).

Aufgabe 4

1. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $L \in C^2(U)$ mit invertierbarer Gradientenabbildung

$$f : U \to V, \quad f(x) = DL(x),$$

wobei $V = f(U) \subset \mathbb{R}^2$. Sei H die Legendretransformierte von L. Man zeige:

$$\rho := \partial_{11}^2 L \, \partial_{22}^2 L - (\partial_{12}^2 L)^2 = \frac{1}{\partial_{11}^2 H \, \partial_{22}^2 H - (\partial_{12}^2 H)^2} \quad \text{und}$$
$$\partial_{11}^2 L = \rho \partial_{22}^2 H; \quad \partial_{22}^2 L = \rho \partial_{11}^2 H; \quad \partial_{12}^2 L = -\rho \partial_{12}^2 H;$$

wobei $\partial_{11} L, \partial_{22} L, \partial_{12} L$ in x und $\partial_{11} H, \partial_{22} H, \partial_{12} H$ in $y = f(x)$ auszuwerten sind.

2. Der Graph von $L \in C^2(U)$, $U \subset \mathbb{R}^2$, sei eine Minimalfläche, d.h. L löst für alle $x \in U$ die Gleichung:

$$(1 + (\partial_2 L(x))^2)\partial_{11}^2 L(x) - 2\partial_1 L(x) \, \partial_2 L(x) \, \partial_{12}^2 L(x) + (1 + (\partial_1^2 L(x))^2)\partial_{22}^2 L(x) = 0.$$

Zeigen Sie, dass diese Gleichung durch die Legendretransformation in die lineare Gleichung

$$(1 + y_1^2)\partial_{11}^2 H(y) + 2y_1 y_2 \partial_{12}^2 H(y) + (1 + y_2^2)\partial_{22}^2 H(y) = 0$$

transformiert wird.
Zusatz: Zeigen Sie, dass für eine Lösung der Minimalflächengleichung $L \in C^2(U)$ an keinem Punkt $x_0 \in U$, $D^2 L(x_0) > 0$ oder $D^2 L(x_0) < 0$ gelten kann.

Abgabe: Freitag, 22.05.2015, 11:30 Uhr.