21.05.2015
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Jonas Hirsch

Karlsruhe Institute of Technology

Analysis 2

6. Übungsblatt

Aufgabe 1 (K, 4 Punkte)

Man zeige, dass es eine Funktion $\varphi \in C^\infty(I)$, mit $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, und $\varphi(0) = 0$ gibt, die der Gleichung

$$\varphi^2(x)x + 2x^2 e^{\varphi(x)} = \varphi(x)$$

genügt. Man berechne $\varphi'(0)$.

Aufgabe 2 (K, 4 Punkte)

Die spezielle lineare Gruppe ist die Menge $SL(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon \det A = 1\}$. Zeigen Sie:

1. $SL(n)$ ist eine (n^2-1)-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n\times n}$;
2. $T_{\mathbb{1}} SL(N) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon tr(A) = 0\}$.

Aufgabe 3

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ mit $\operatorname{Rang} Df(x) = 1$ für alle x in einer offenen Umgebung von $M := f^{-1}(0)$. Wir definieren

$$R := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon f(r,z) = 0, r = \sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

Zeigen Sie, dass R eine zwei-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist, welche durch Rotation von M um die z-Achse erzeugt wird.

Aufgabe 4 (K, 4 Punkte)

Beim schiefen Wurf aus der Höhe $h > 0$ mit der Anfangsgeschwindigkeit $v = (v_1, v_2)$ und der Erdbeschleunigung g ist die Bahnkurve $(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon))$, $0 \le t \le T(\varepsilon)$ bis zum Aufschlagszeitpunkt $T(\varepsilon) > 0$ in der Höhe $y = 0$, gegeben durch

$$(x(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon)) := \begin{cases} \left(v_1 t, h + v_2 t - \frac{g}{2}t^2\right) & \text{für } \varepsilon = 0 \\ \left(v_1 \frac{1-e^{-\varepsilon t}}{\varepsilon}, h + (v_2 + \frac{g}{\varepsilon})\frac{1-e^{-\varepsilon t}}{\varepsilon} - g\frac{t}{\varepsilon}\right) & \text{für } \varepsilon \neq 0. \end{cases}$$

Dabei ist $\varepsilon \in \mathbb{R}$ der Reibungsparameter. Zeigen Sie für die Wurfweite $w(\varepsilon)$ die Näherung

$$w(\varepsilon) = w(0) - \frac{g}{3}\frac{v_1 T(0)^3}{gT(0) - v_2}\varepsilon + k(\varepsilon),$$

wobei $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{k(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Zeigen Sie, dass die Funktionen x und y in $[0, T(\varepsilon)] \times \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind.
2. Die Zeit $T(\varepsilon)$ ist gegeben durch $y(T(\varepsilon), \varepsilon) = 0$. Verwenden Sie den Satz über implizite Funktionen um eine Formel für $T'(0)$ zu erhalten.
3. Mittels einer Taylor-Entwicklung approximiere man nun $w(\varepsilon) = x(T(\varepsilon), \varepsilon)$.

Abgabe: Freitag, 29.05.2015, 11:30 Uhr.

Prüfung

Termine:
Analysis I: 15. September 2015, 8-10 Uhr.
Analysis II: 15. September 2015, 11-13 Uhr.
Analysis I/II: 15. September 2015, 8-10 Uhr (Teil 1) und 11-13 Uhr (Teil 2).

Anmeldungen:

Für die *BACHELOR MODULPRÜFUNGEN*:

Über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende)

Für Studierende des *LEHRAMT MATHEMATIK*:

Lehramtskandidaten, die nach der *alten PO* studieren, in Zimmer 3.029, Kollegiengebäude Mathematik (Fr. Ewald). Zur Anmeldung ist die Zulassung vom Prüfungsamt (Studienbüro) mitzubringen!
Lehramtskandidaten mit *Hauptfach Mathematik, die nach der neuen PO* (ab WS 2010/11) studieren, über QISPOS (Selbstbedienungsfunktion für Studierende)
Lehramtskandidaten mit *Nebenfach Mathematik, die nach der neuen PO* (ab WS 2010/11) studieren, in Zimmer 3.029, Kollegiengebäude Mathematik (Fr. Ewald)

Für *SCHÜLERSTUDENTEN:*

Im Zimmer 3.029, Kollegiengebäude Mathematik (Fr. Ewald).

Anmeldeschluß für alle Prüfungen: 1. September 2015

Hörsaaleinteilung: Die Hörsaaleinteilung wird rechtzeitig bekannt gegeben.

Siehe auch allgemeine Prüfungsankündigungen unter
http://www.math.kit.edu/iana3/ schmoeger/seite/termin/de.