28.05.2015
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Jonas Hirsch

Karlsruhe Institute of Technology

Analysis 2

7. Übungsblatt

Aufgabe 1 (K, 4 Punkte)

1. Man bestimme die Maxima und Minima des Polynoms
$$p(x,y) = 4x^2 - 3xy$$
auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{B_1(0)} = \{(x,y)\colon x^2+y^2 \leq 1\}$.
2. Gegeben sei das Ellipsoid
$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1\right\}$$
zu den Parametern $a,b,c > 0$. Finden Sie den einbeschriebenen, achsenparallelen Quader Q mit größtem Volumen.

Aufgabe 2 (K, 4 Punkte)

Entscheiden Sie (mit Nachweis), ob die folgenden Kurven $c_i \in C^0([0,1],\mathbb{R}^2), i = 1,2,3$ rektifizierbar sind:

1. $$c_1(t) = \begin{cases} (t^2, t^2) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t) & \text{für } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$
2. $$c_2(t) = \begin{cases} (2+t, t^2\sin(\frac{1}{t})) & \text{für } 0 < t \leq 1 \\ (2,0) & \text{für } t = 0 \end{cases}$$
3. $$c_3(t) = \begin{cases} (t, t\sin(\frac{1}{t})) & \text{für } 0 < t \leq 1 \\ (0,0) & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 3 (K, 4 Punkte)

Betrachten Sie die in Polarkoordinaten gegebene Kurve
$$c(t) = (r(t)\cos(\varphi(t)), r(t)\sin(\varphi(t))), \quad t \in I = [a,b] \subset \mathbb{R},$$
mit $r \in C^1(I,\mathbb{R}^+)$ und $\varphi \in C^1(I)$.

1. Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve c.
2. Berechnen Sie die Bogenlänge $L(c)$ im konkreten Beispiel $r(t) = t = \varphi(t)$ mit $I = [\pi, 2\pi]$. Skizzieren Sie die Kurve.
3. Parametrisieren Sie die Kurve $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $d(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$ nach der Bogenlänge und fertigen Sie auch hier eine Skizze an..

Aufgabe 4

Seien M, N zweidimensionale C^r-Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$ mit $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Ferner gelte $M \cap N \neq \emptyset$ und $T_xM \neq T_xN$ für alle $x \in M \cap N$. Zeigen Sie, dass $M \cap N$ eine eindimensionale C^r-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist und bestimmen Sie $T_x(M \cap N)$.

Abgabe: Freitag, 05.06.2015, 11:30 Uhr.