03.06.2015
Prof. Dr. Tobias Lamm
Dr. Jonas Hirsch

Karlsruhe Institute of Technology

Analysis 2

8. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $p, q \in \mathbb{R}^n$ und $c : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $c(t) = (1-t)p + tq$.

1. Zeigen Sie, dass $L(\tilde{c}) \geq L(c)$ für alle parametrisierten Kurven $\tilde{c} \in C^0([a,b], \mathbb{R}^n)$ mit $\tilde{c}(a) = p$, $\tilde{c}(b) = q$ und $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig.
2. Sei $\alpha \in C^0([a,b], \mathbb{R}^n)$ mit $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = q$. Zeigen Sie: Ist $L(c) = L(\alpha)$, so gilt $\alpha(t) = (1-\varphi(t))p + \varphi(t)q$, wobei $\varphi : [a,b] \to [0,1]$ nichtfallend und stetig ist.

Aufgabe 2 (K, 4 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $c \in C^2(I, \mathbb{R}^n)$ eine reguläre Kurve, die in $t_0 \in I$ ein lokales Maximum von $|c(t)|$ hat. Zeigen Sie, dass

$$|\kappa(t_0)| \geq \frac{1}{|c(t_0)|},$$

wobei $\kappa : I \to \mathbb{R}$ die Krümmung von c ist.
Hinweis: Betrachten Sie $\frac{d}{dt}|_{t=t_0}|c(t)|^2$ und $\frac{d^2}{dt^2}|_{t=t_0}|c(t)|^2$.

Aufgabe 3 (K, 4 Punkte)

Sei $c \in C^2([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$ die Kurve

$$c(t) = \Big((1 + 2\cos(t))\cos(t), (1 + 2\cos(t))\sin(t)\Big).$$

1. Bestimmen Sie die Schnittpunkte von c mit den Koordinatenachsen.
2. Bestimmen Sie die Punkte von c mit horizontalen und vertikalen Tangenten.
3. Bestimmen Sie die Krümmnung von c bzgl. der Einheitsnormalen $\nu(t) = J\tau(t)$ mit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\tau(t) = \frac{c'(t)}{|c'(t)|}$.
4. Skizzieren Sie c und markieren Sie die Punkte extremaler Krümmung.

Aufgabe 4 (K, 4 Punkte)

Sei $T(x) = Sx + t$ eine Euklidische Bewegung in $\mathbb{R}^2$, d.h. $S \in O(2)$ und $t \in \mathbb{R}^2$ und sei $c \in C^2([a,b], \mathbb{R}^2)$ nach Bogenlänge parametrisiert mit Einheitsnormale $\nu \in C^1([a,b], \mathbb{R}^2)$ längs c. Zeigen Sie, dass

1. $L(c) = L(T \circ c)$;
2. $S\nu$ eine Einheitsnormale längs $T \circ c$ ist;
3. $\kappa_c(t) = \kappa_{T\circ c}(t)$ für alle $t \in [a,b]$, wobei κ_c die Krümmung von c bzgl. ν und $\kappa_{T\circ c}$ die Krümmung von $T \circ c$ bzgl. $S\nu$ ist;
4. $\kappa_c(t) = \kappa_{T\circ c}(t)$ für alle $t \in [a,b]$ unabhängig davon, ob die Kurve c nach Bogenlänge parametrisiert ist oder nicht.

Aufgabe 5

Gegeben sei eine Folge rektifizierbarer Kurven $c_j \in C^0([0,1], \mathbb{R}^n)$, $i \in \mathbb{N}$, mit gleichmäßig beschränkter Länge $L(c_j)$, d.h. es existiert ein $L < \infty$, so dass für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $L(c_j) \leq L$. Weiter gelte $c_j \to c \in C^0([0,1], \mathbb{R}^n)$ gleichmäßig auf $[0,1]$ für $j \to \infty$. Zeigen Sie, dass c rektifizierbar ist mit

$$L(c) \leq \liminf_{j \to \infty} L(c_j).$$

Zeigen Sie durch ein explizites Beispiel, dass die strikte Ungleichung möglich ist.

Abgabe: Freitag, 12.06.2015, 11:30 Uhr.